



GeoGebra als Werkzeug im schriftlichen Abitur

Workshop des GeoGebra Instituts
Landau

Armin Baeger &
Jan Lucas Fischer

23.06.2026 Mathe Lehren und Lernen mit GGB





Jan Lucas Fischer

RPTU in Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Promotion mit der Forschungsfrage: Was müssen Schüler:innen können, um Abituraufgaben mit GeoGebra zu lösen?

Workshop Übersicht Ablauf

1. Vortrag GeoGebra im schriftlichen Abitur
2. Vertiefung an Beispielaufgabe
3. Arbeitsphase
4. Zusammenfassung

Workshop Übersicht

1. Vortrag GeoGebra im schriftlichen Abitur
2. Vertiefung an Beispielaufgabe
3. Arbeitsphase
4. Zusammenfassung



GeoGebra als Werkzeug im schriftlichen Abitur

Was müssen Schüler:innen können, um
mit GeoGebra Abituraufgaben zu lösen?

Armin Baeger &
Jan Lucas Fischer

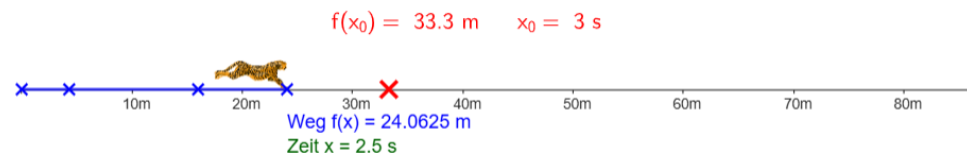
23.06.2026 Mathe Lehren und Lernen mit GGB



R
TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Digitale Lernumgebungen

- Rahmen für das selbstständige Lernen von mathematischen Konzepten
- Applets auf Basis digitaler Werkzeuge



☒ Berechnung der mittleren Geschwindigkeiten um den Zeitpunkt x_0 ☐ Genauigkeit einstellen: 0.1 s

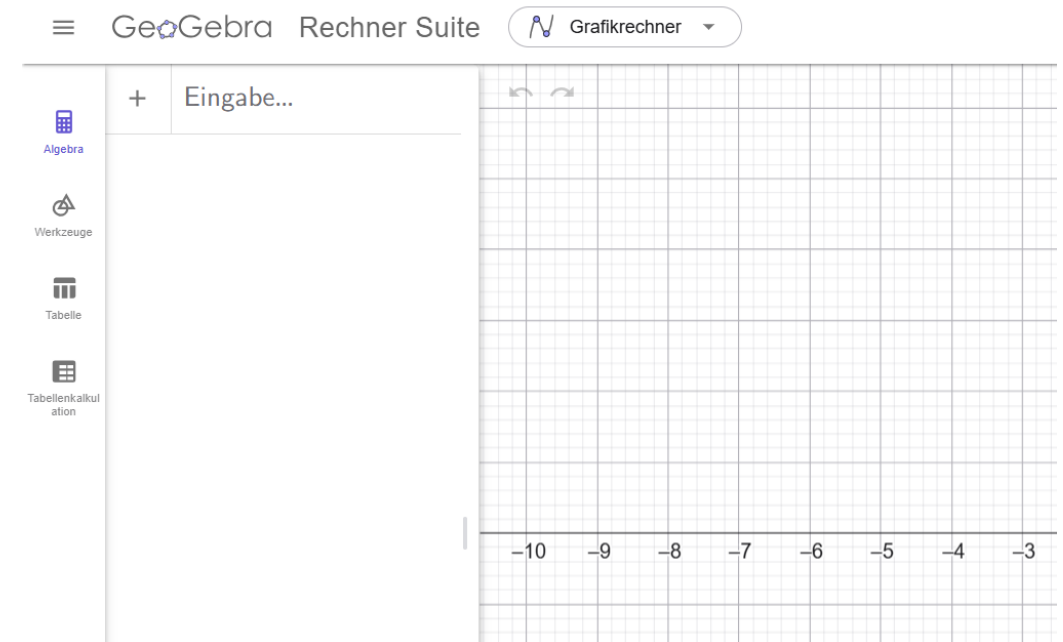
$x_0 = 3$

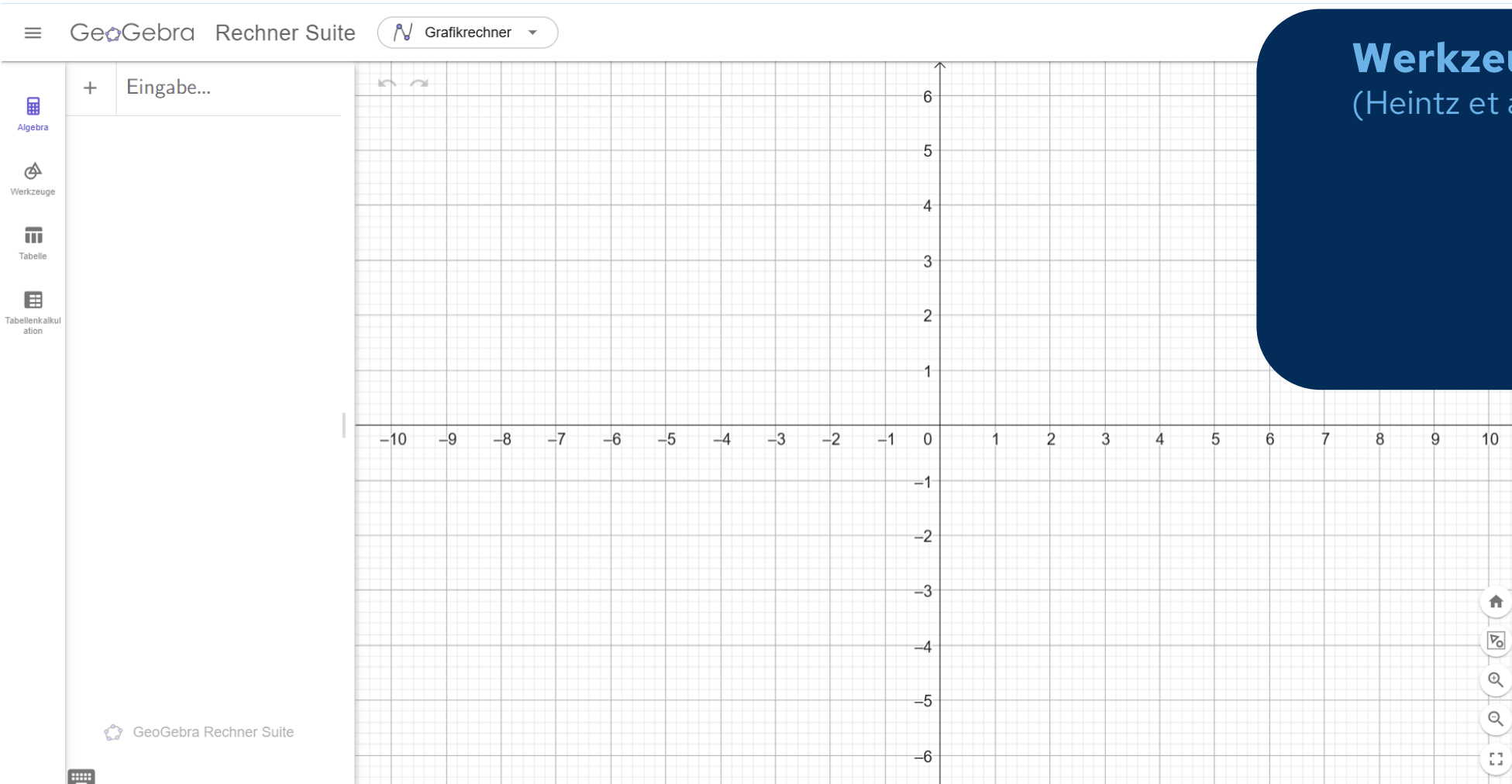
im Zeitraum mittlere Geschwindigkeit

$[x; x_0]$ $\bar{v} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{33.3\text{m} - 0}{3\text{s} - 2.5\text{s}} \text{ m}$

Digitale Werkzeuge

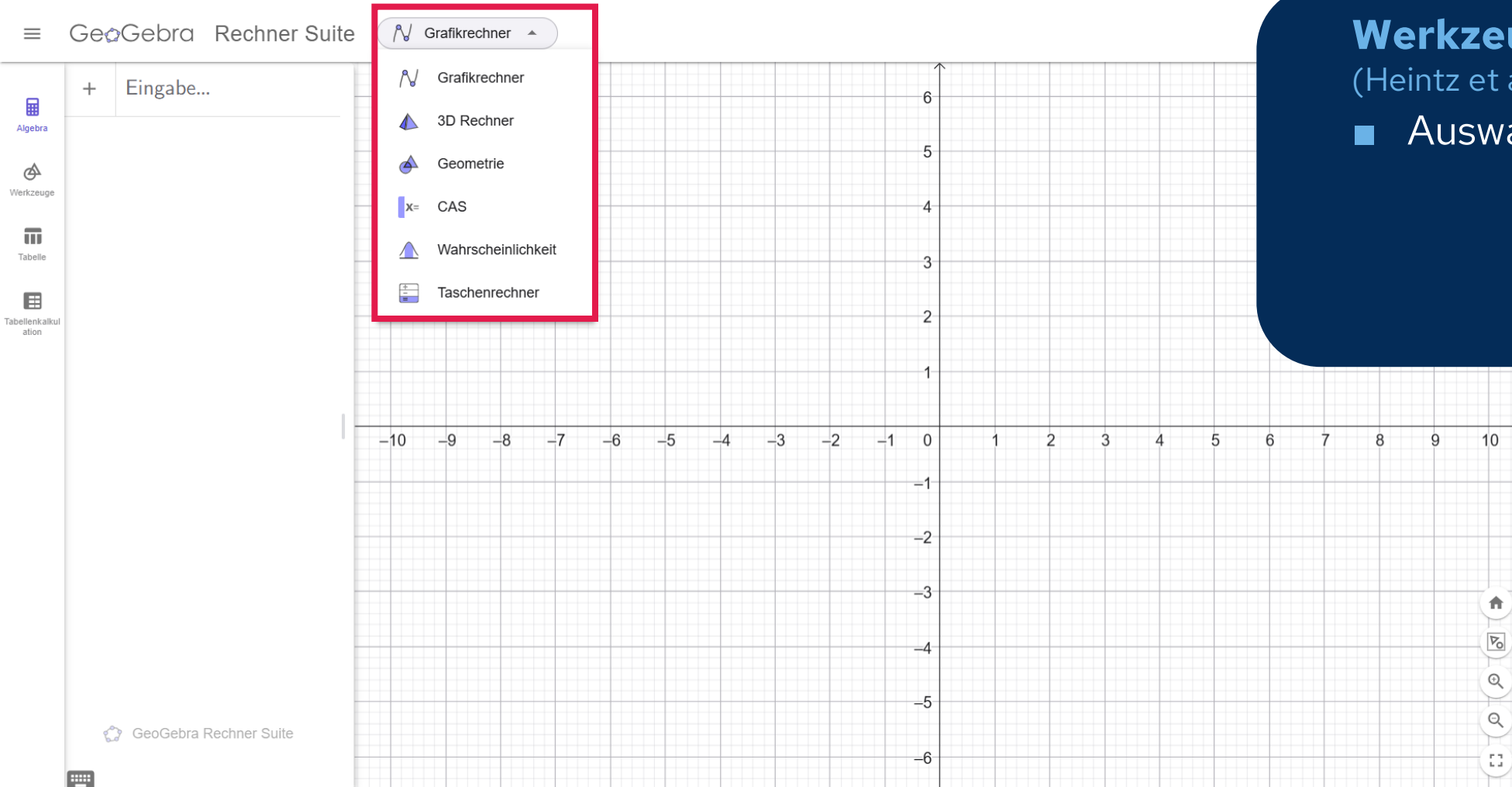
- Ohne Vorstrukturierung/Vorgaben
- Ausgestaltung zu Spezialwerkzeug: kompetenter Werkzeugumgang





Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)



Werkzeugkompetenzen

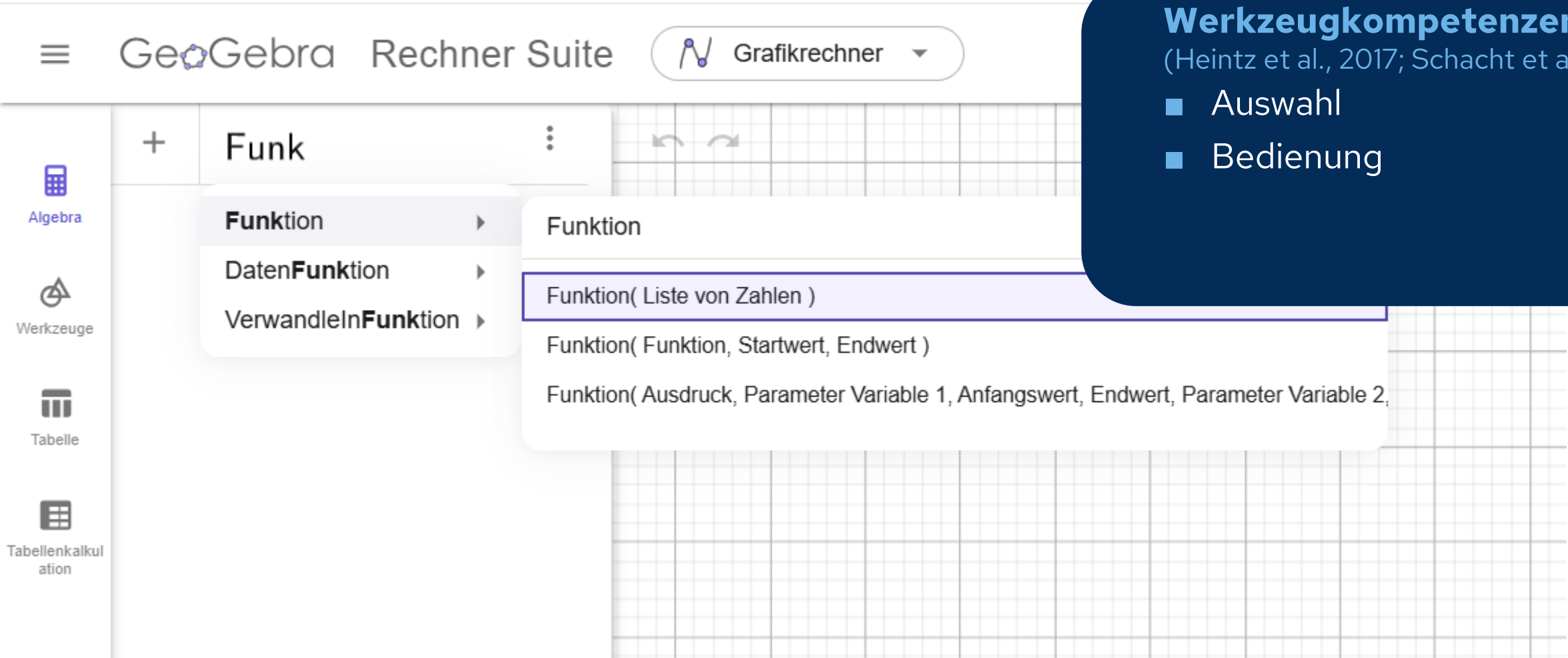
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

■ Auswahl

Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

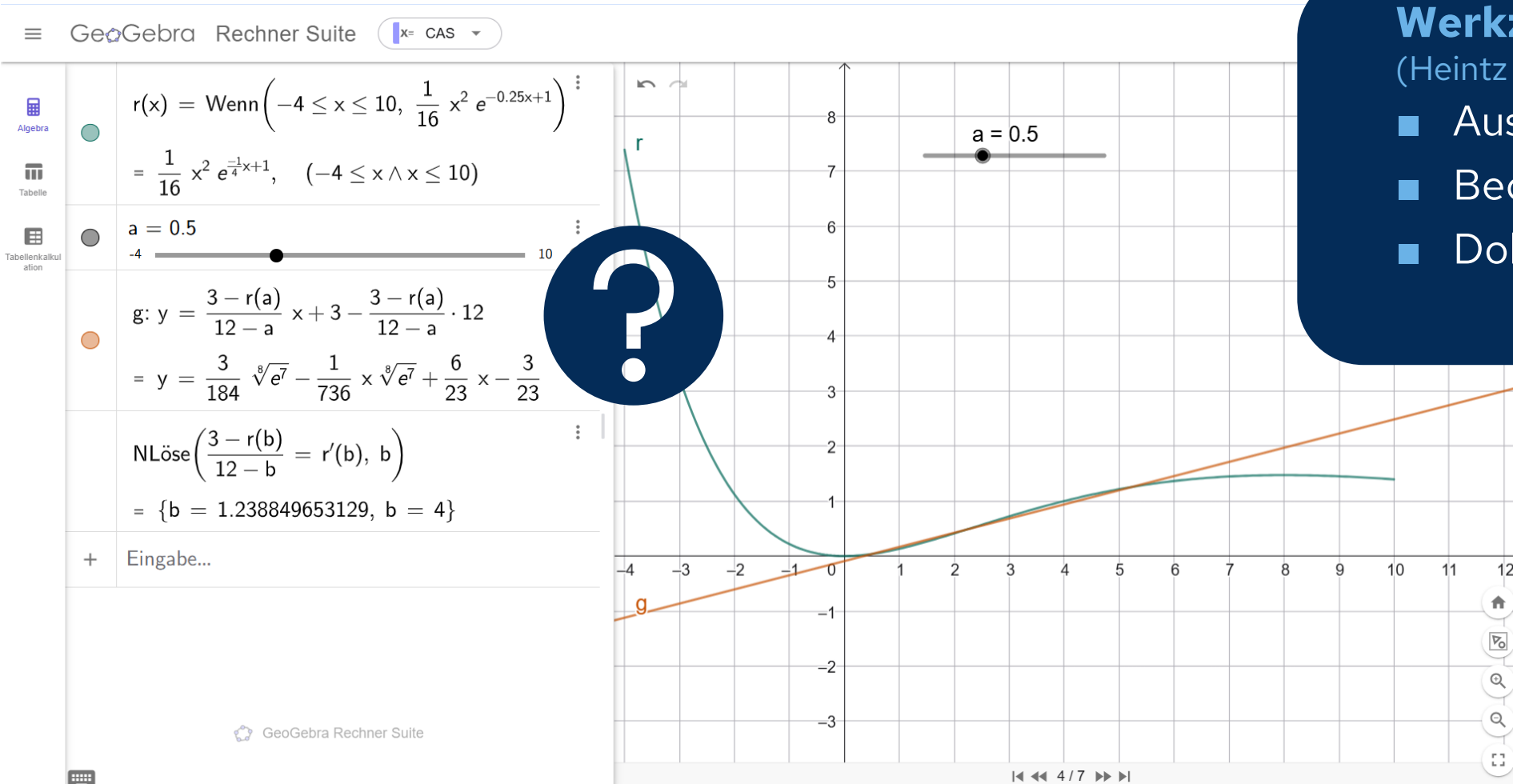
- Auswahl
- Bedienung



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

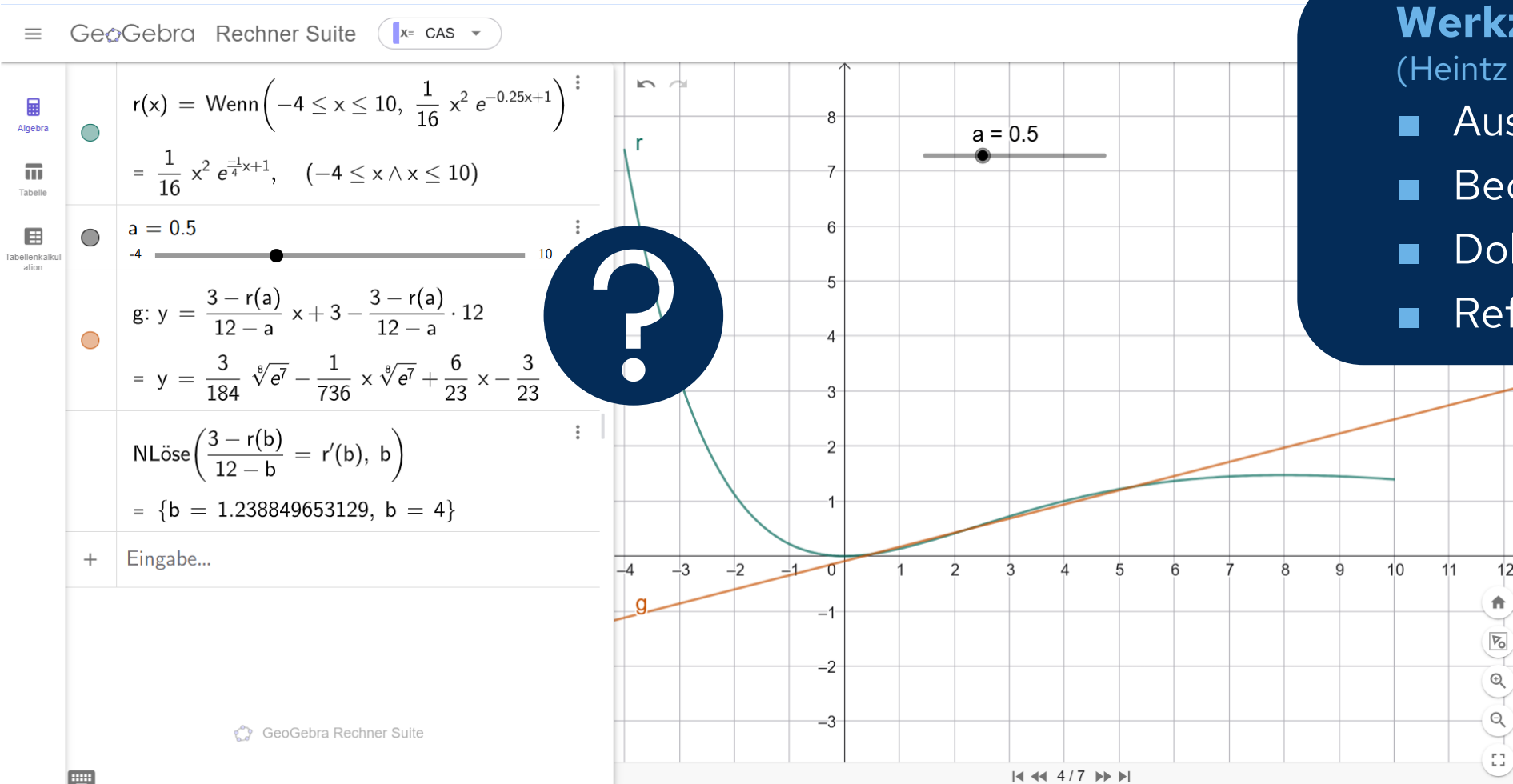
- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation

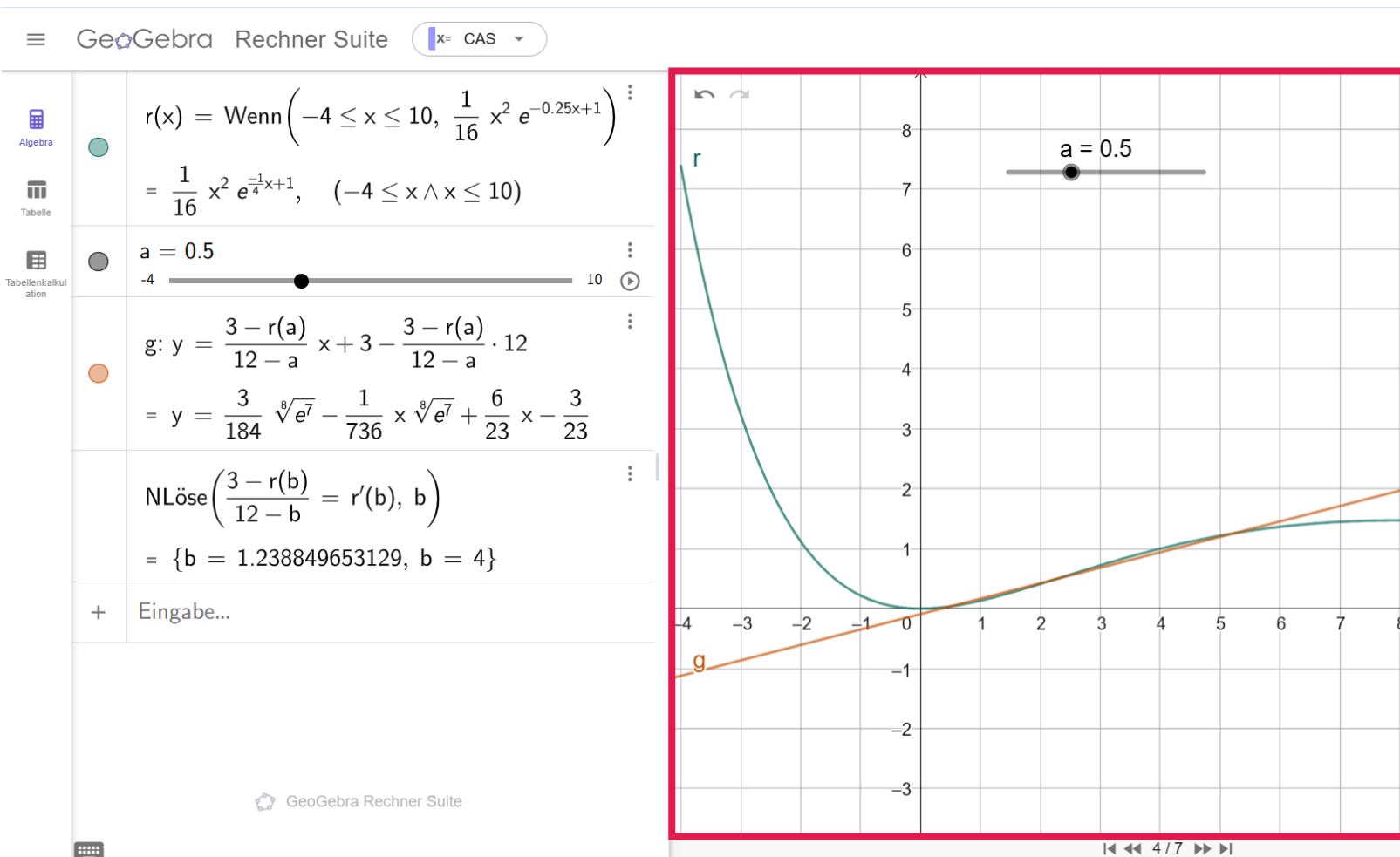


Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion





Werkzeugkompetenzen

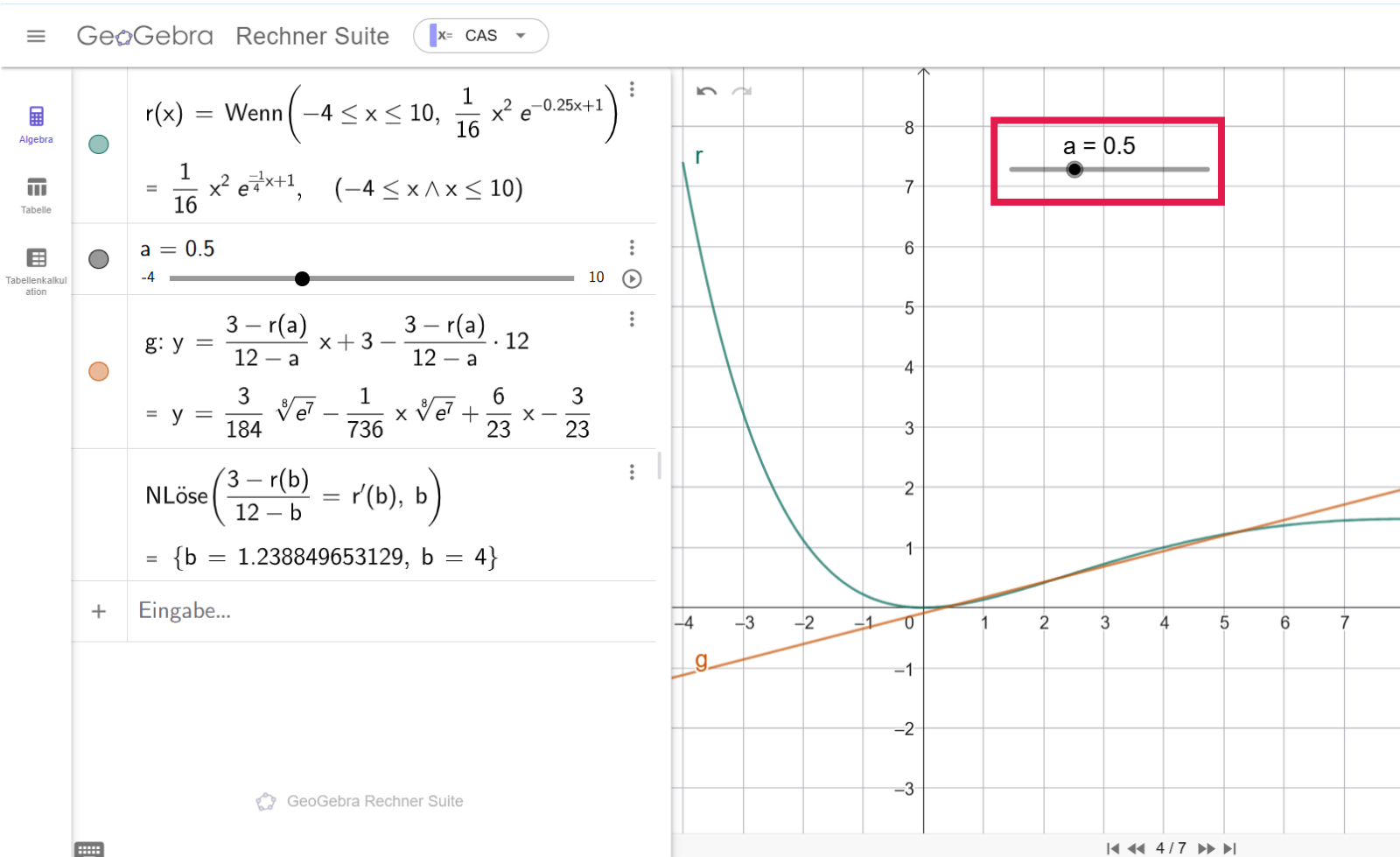
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation

GeoGebra Rechner Suite Grafikrechner

Algebra

Werkzeuge

Tabelle

Tabellenkalkulation

$r_0(x) = \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}$

$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, r_0(x))$
 $= \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}, \quad (-4 \leq x \leq 10)$

$a = 4.1$

$g: y = \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} x + 3 - \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} \cdot 12$

$l1 = \text{Löse}\left(r'(a) = \frac{3 - r(a)}{12 - a}, a\right)$
 $= \{\}$

+ Eingabe...

GeoGebra Rechner Suite

Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen

GeoGebra Rechner Suite x= CAS

Algebra

$r(x) = \text{Wenn}\left(-4 \leq x \leq 10, \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}\right)$

$= \frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-1}{4}x+1}, \quad (-4 \leq x \wedge x \leq 10)$

Tabelle

$a = 0.5$

-4 10

Tabellenkalkulation

$g: y = \frac{3 - r(a)}{12 - a} x + 3 - \frac{3 - r(a)}{12 - a} \cdot 12$

$= y = \frac{3}{184} \sqrt[8]{e^7} - \frac{1}{736} x \sqrt[8]{e^7} + \frac{6}{23} x - \frac{3}{23}$

Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen
- Fokussierungshilfe

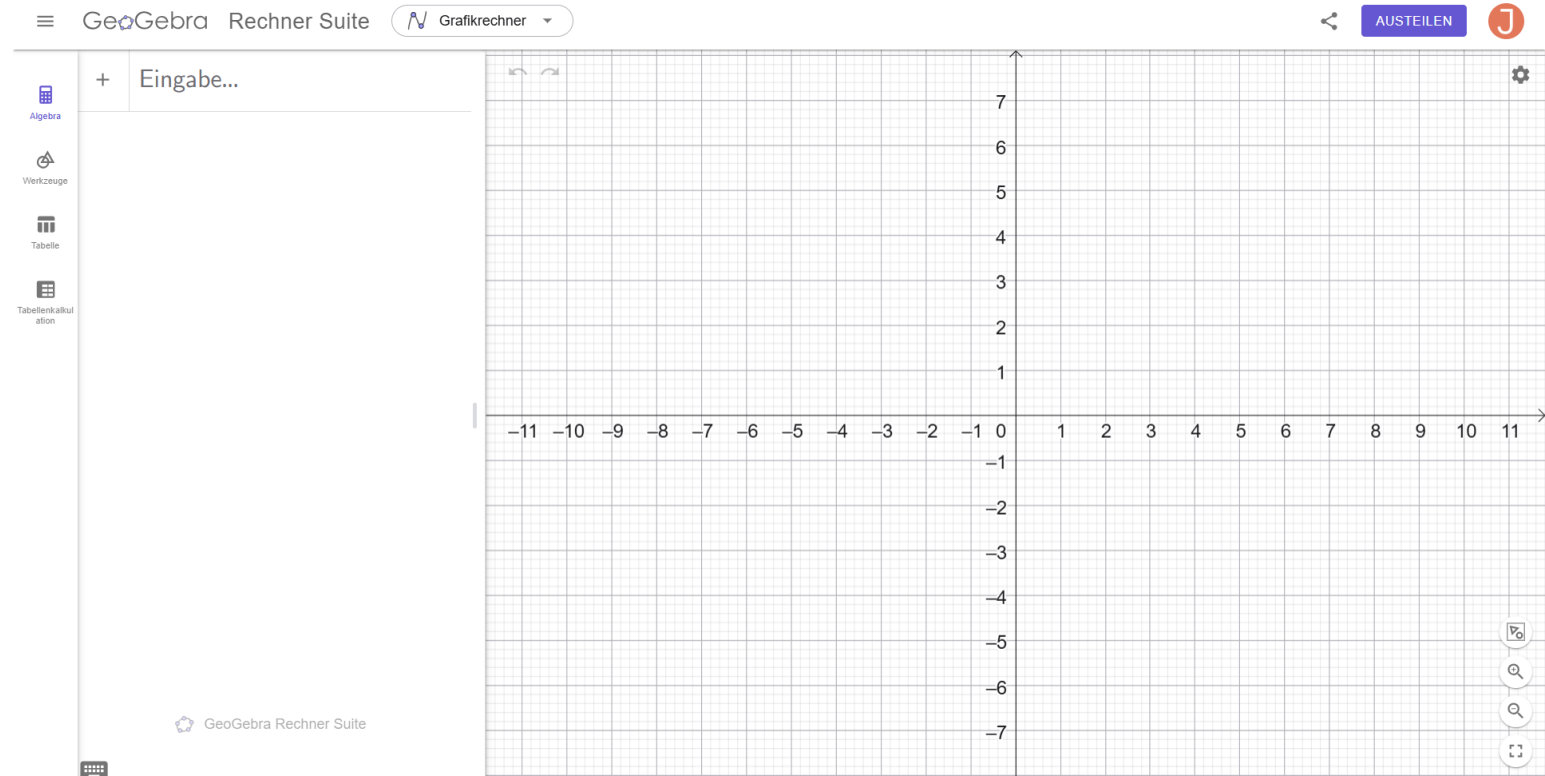
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren

	$r(x) = \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}$ 
	Eingabe...

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

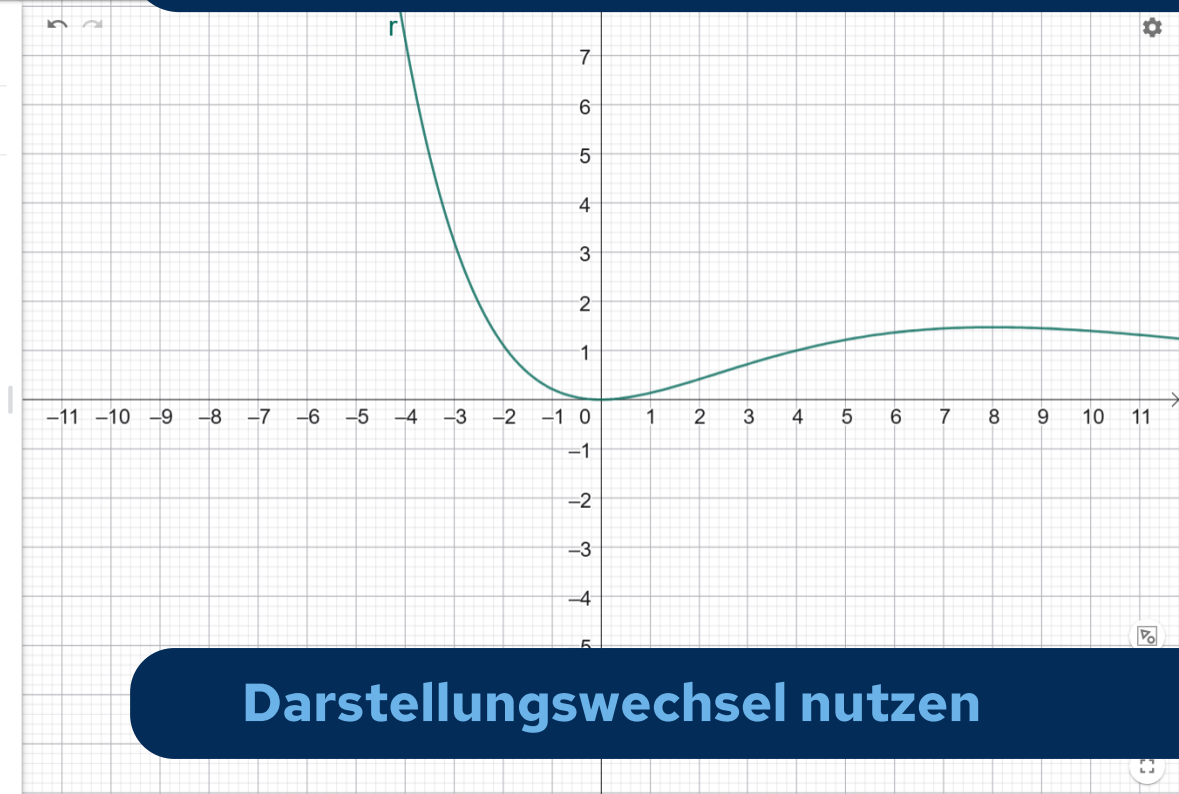
Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

GeoGebra Rechner Suite

Grafikrechner

$r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$

+ Eingabe...



Bedienung: Funktion definieren

Darstellungswechsel nutzen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

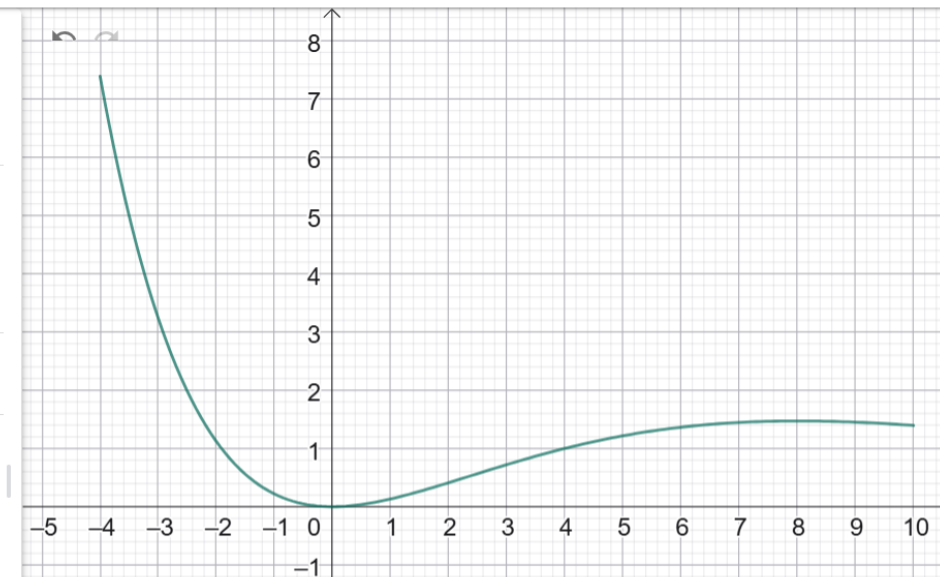
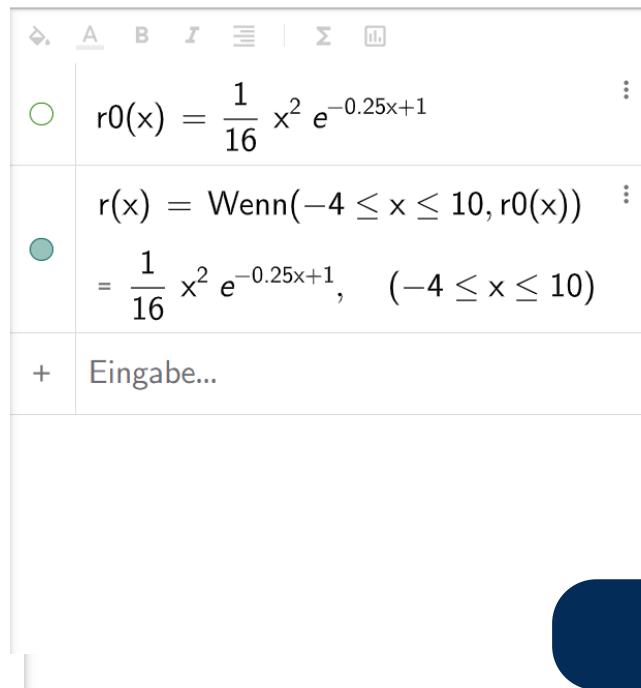
$$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$$

beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren

GeoGebra Rechner Suite Grafikrechner



Darstellungswechsel nutzen

Fokussierungshilfe:
Definitionsbereich und Benennung

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

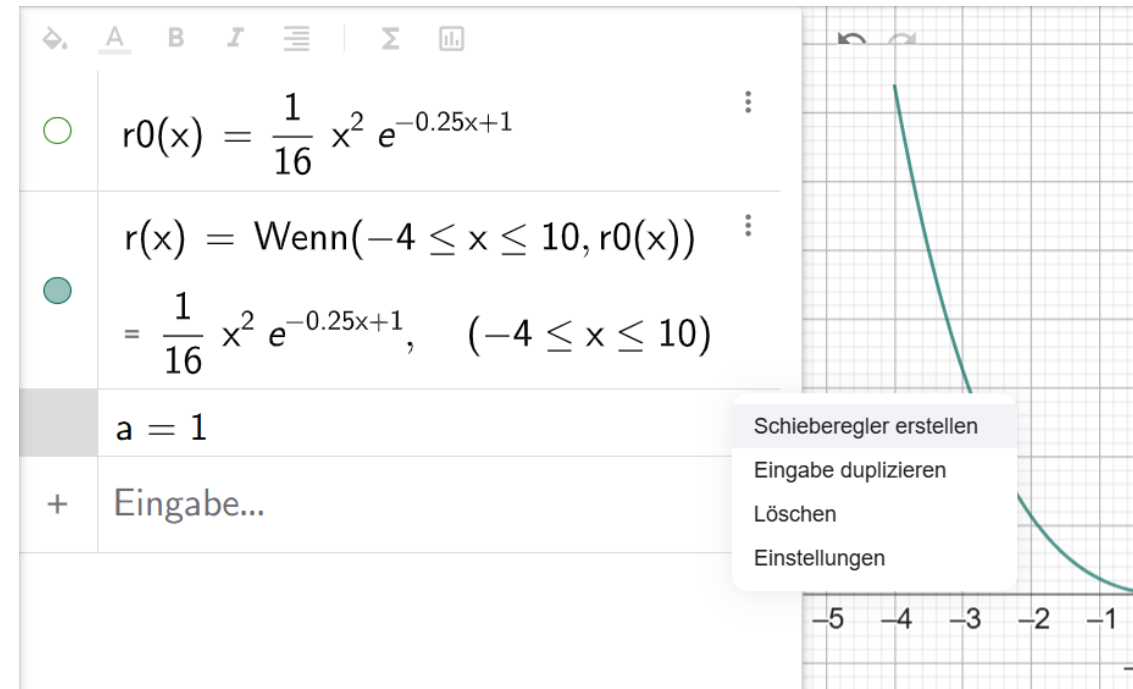
Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$$

beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung:
Schieberegler definieren



Fokussierungshilfe: Benennung

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot 12\right)$$

beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren

GeoGebra Rechner Suite Graphikrechner

$r_0(x) = \frac{1}{16}x^2 e^{-0,25x+1}$

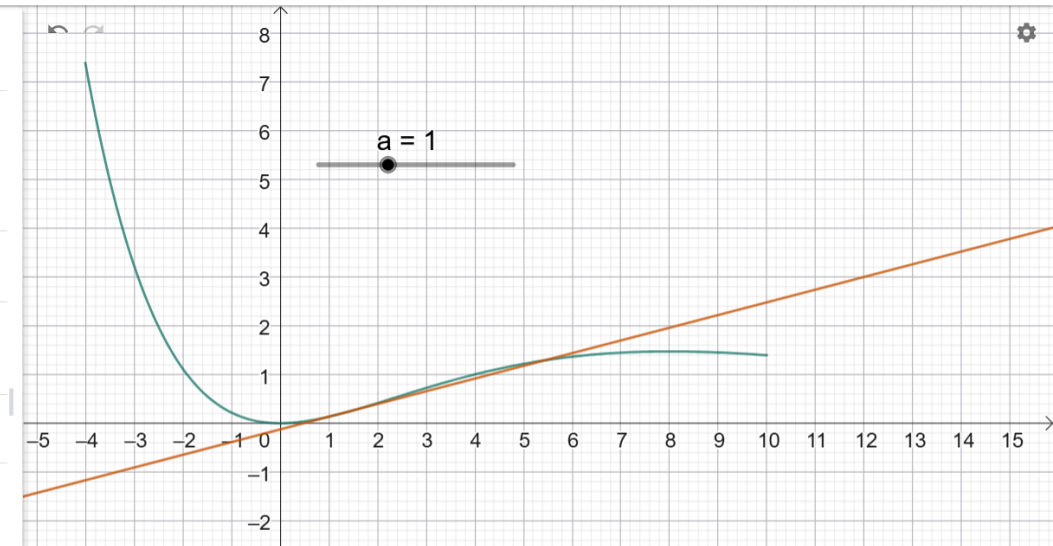
$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, r_0(x))$

$= \frac{1}{16}x^2 e^{-0,25x+1}, \quad (-4 \leq x \leq 10)$

$a = 1$

$g: y = \frac{3-r(1)}{12-1}x + 3 - \frac{3-r(1)}{12-1} \cdot 12$

+ Eingabe...



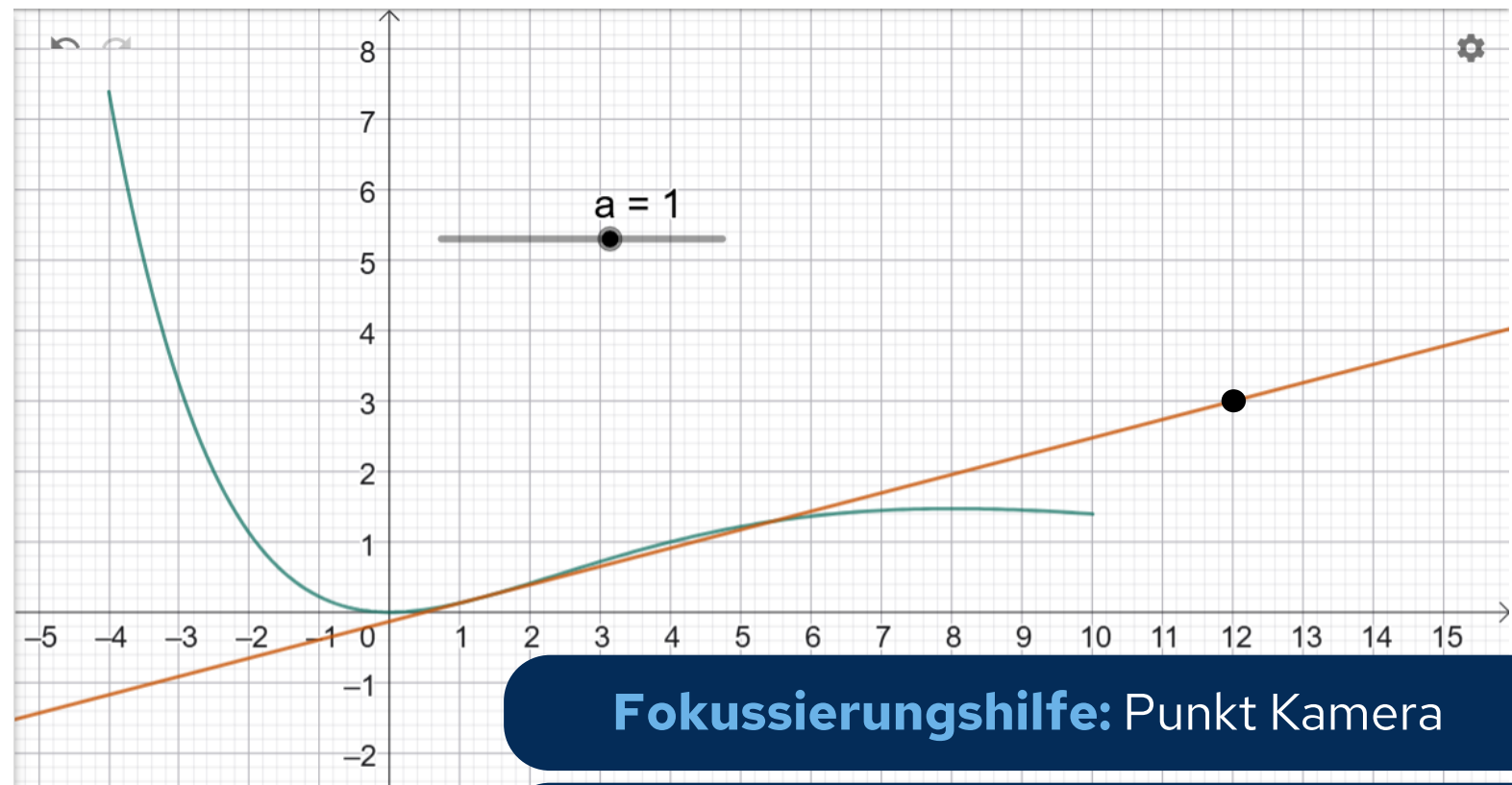
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Fokussierungshilfe: Punkt Kamera

Darstellungswechsel nutzen

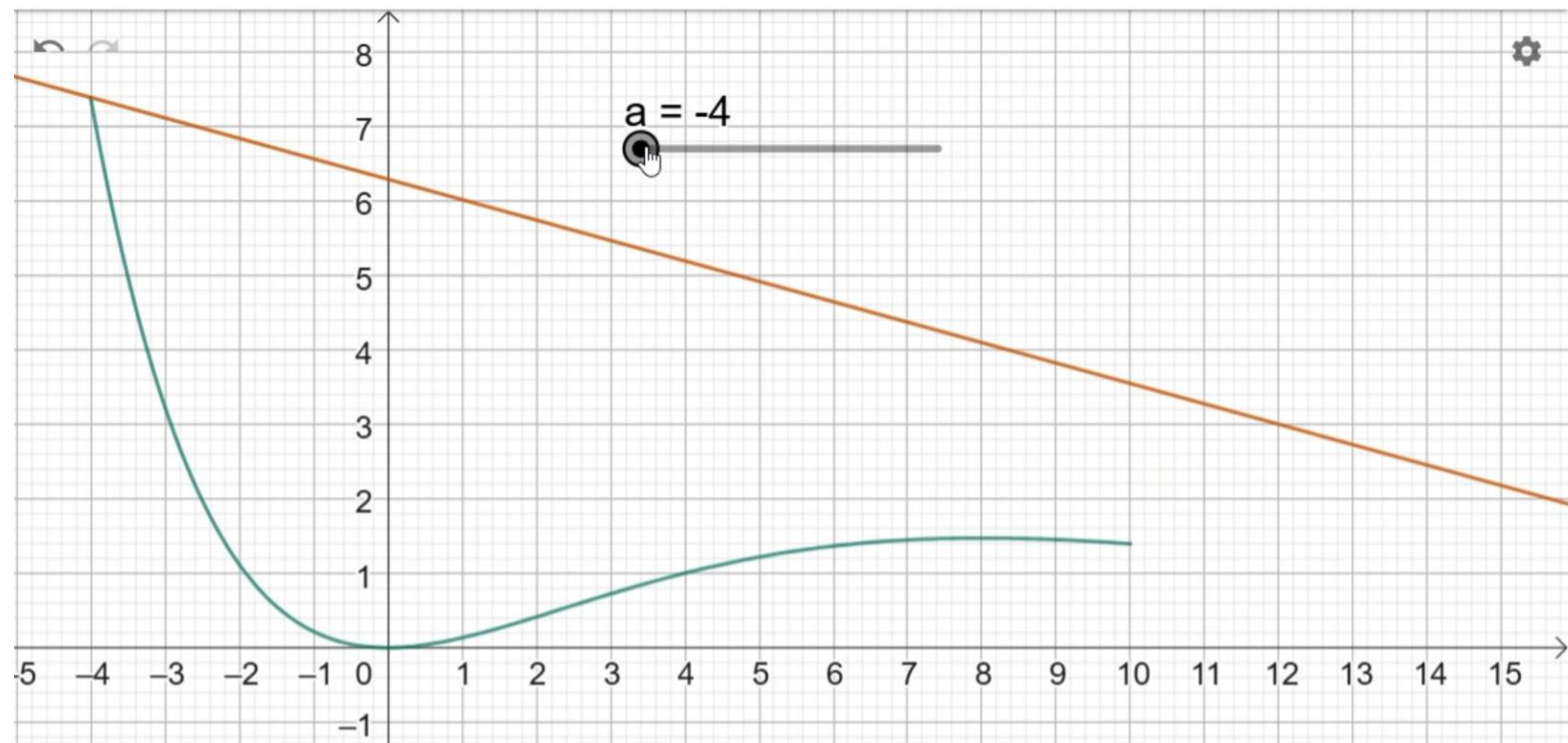
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Systematische Variation

IQB-Aufgabe 2025

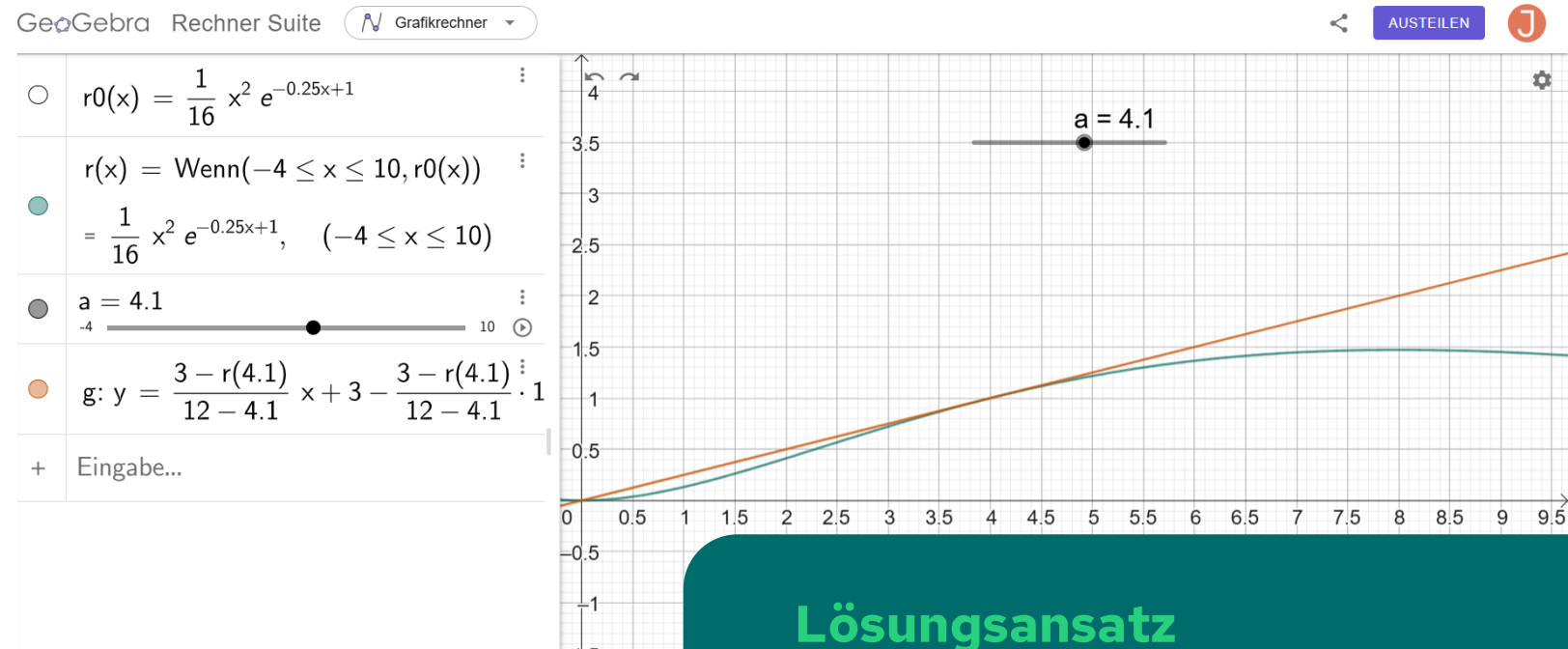
Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$$

beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Lösungsansatz

$$r'(a) = m_g = \frac{3 - r(a)}{12 - a}$$

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen

GeoGebra Rechner Suite Grafikrechner

☐	$r0(x) = \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}$	
☒	$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, r0(x))$ $= \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}, \quad (-4 \leq x \leq 10)$	
☐	$a = 4.1$ -4 10	
☒	$g: y = \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} x + 3 - \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} \cdot 1$	
☐	Eingabe...	

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen

GeoGebra Rechner Suite Grafikrechner

☐	$r_0(x) = \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}$	$\vdots$
☒	$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, r_0(x))$ $= \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}, \quad (-4 \leq x \leq 10)$	$\vdots$
☐	$a = 4.1$ -4  10 $\rightarrow$	$\vdots$
☐	$g: y = \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} x + 3 - \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} \cdot 1$	$\vdots$
☐	$l1 = \text{Löse}\left(r'(a) = \frac{3 - r(a)}{12 - a}, a\right)$ $= \{\}$	$\vdots$
☐	Eingabe...	

Feedback des Werkzeugs nutzen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen

GeoGebra Rechner Suite **Grafikrechner**

☐	$r_0(x) = \frac{1}{16}x^2 e^{-0.25x+1}$	$\vdots$
☒	$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, r_0(x))$ $= \frac{1}{16}x^2 e^{-0.25x+1}, \quad (-4 \leq x \leq 10)$	$\vdots$
☐	$a = 4.1$ -4  10 $\odot$	$\vdots$
☒	$g: y = \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1}x + 3 - \frac{3 - r(4.1)}{12 - 4.1} \cdot 12$	$\vdots$
☐	$l1 = \text{Löse}\left(r'(b) = \frac{3 - r(b)}{12 - b}, b\right)$ $= \{\}$	$\vdots$
☐	Eingabe...	

Feedback des Werkzeugs nutzen

IQB-Aufgabe 2025

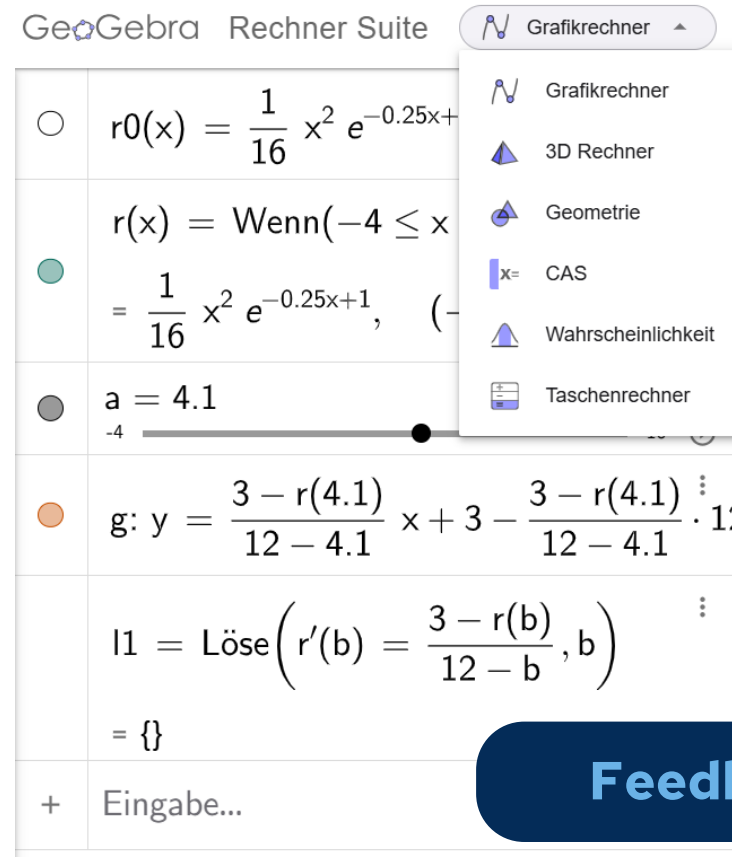
Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen



GeoGebra Rechner Suite

Grafikrechner

- Grafikrechner
- 3D Rechner
- Geometrie
- CAS
- Wahrscheinlichkeit
- Taschenrechner

$r_0(x) = \frac{1}{16}x^2 e^{-0,25x+1}$

$r(x) = \text{Wenn}(-4 \leq x \leq 10, \frac{1}{16}x^2 e^{-0,25x+1}, 0)$

$a = 4.1$

$g: y = \frac{3-r(4.1)}{12-4.1}x + 3 - \frac{3-r(4.1)}{12-4.1}12$

$l1 = \text{Löse}\left(r'(b) = \frac{3-r(b)}{12-b}, b\right)$

$= \{\}$

+ Eingabe...

Feedback des Werkzeugs nutzen

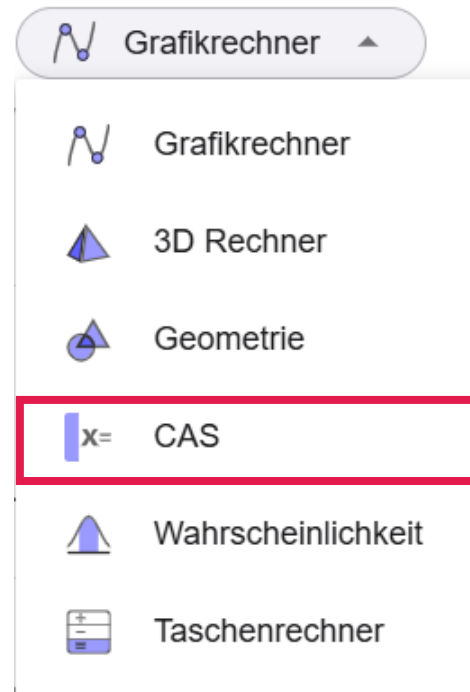
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Bedienung: Gleichung lösen

Auswahl: GeoGebra CAS-Rechner

Feedback des Werkzeugs nutzen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit

$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot 12\right)$ beschrieben.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Auswahl: GeoGebra CAS-Rechner

Bedienung: Gleichung lösen

Dokumentation?

GeoGebra Rechner Suite x= CAS

$$r(x) = \text{Wenn}\left(-4 \leq x \leq 10, \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-1}{4}x+1}, \quad (-4 \leq x \wedge x \leq 10)$$

$a = 0.5$

-4  10

$$g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} x + 3 - \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot 12$$
$$= y = \frac{3}{184} \sqrt[8]{e^7} - \frac{1}{736} x \sqrt[8]{e^7} + \frac{6}{23} x - \frac{3}{23}$$

$$\text{NLöse}\left(\frac{3-r(b)}{12-b} = r'(b), b\right)$$
$$= \{b = 1.238849653129, b = 4\}$$

Dokumentation: Fachsprache

$$r'(a) = m_g \Leftrightarrow r'(a) = \frac{3 - r(a)}{12 - a}$$
$$\Leftrightarrow a = 1,24 \vee a = 4$$

Dokumentation: Fach- und Werkzeugsprache

- GeoGebra CAS-Rechner auswählen
- Maximale Sichtlinie der Kamera:

$$r'(a) = m_g \Leftrightarrow r'(a) = \frac{3 - r(a)}{12 - a}$$

Löse()

$$\Leftrightarrow a = 1,24 \vee a = 4$$

GeoGebra Rechner Suite CAS



$$r(x) = \text{Wenn}\left(-4 \leq x \leq 10, \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-1}{4}x+1}, \quad (-4 \leq x \wedge x \leq 10)$$



$a = 0.5$

-4  10 



$$g: y = \frac{3 - r(a)}{12 - a} x + 3 - \frac{3 - r(a)}{12 - a} \cdot 12$$
$$= y = \frac{3}{184} \sqrt[8]{e^7} - \frac{1}{736} x \sqrt[8]{e^7} + \frac{6}{23} x - \frac{3}{23}$$



$$\text{NLöse}\left(\frac{3 - r(b)}{12 - b} = r'(b), b\right)$$
$$= \{b = 1.238849653129, b = 4\}$$

Reflexion: Nutzen und Grenzen des Werkzeugs

- Reflektierte Nutzung von Variablen
- Algebraisches Gleichungslösen: GGB CAS-Rechner

Bedien-
kompetenz

Auswahl-
kompetenz

GeoGebra Rechner Suite

x= CAS

$$r(x) = \text{Wenn}\left(-4 \leq x \leq 10, \frac{1}{16} x^2 e^{-0.25x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-1}{4}x+1}, \quad (-4 \leq x \wedge x \leq 10)$$

$$a = 0.5$$



$$g: y = \frac{3 - r(a)}{12 - a} x + 3 - \frac{3 - r(a)}{12 - a} \cdot 12$$
$$= y = \frac{3}{184} \sqrt[8]{e^7} - \frac{1}{736} x \sqrt[8]{e^7} + \frac{6}{23} x - \frac{3}{23}$$

$$\text{NLöse}\left(\frac{3 - r(b)}{12 - b} = r'(b), b\right)$$
$$= \{b = 1.238849653129, b = 4\}$$

Werkzeugkompetenzen

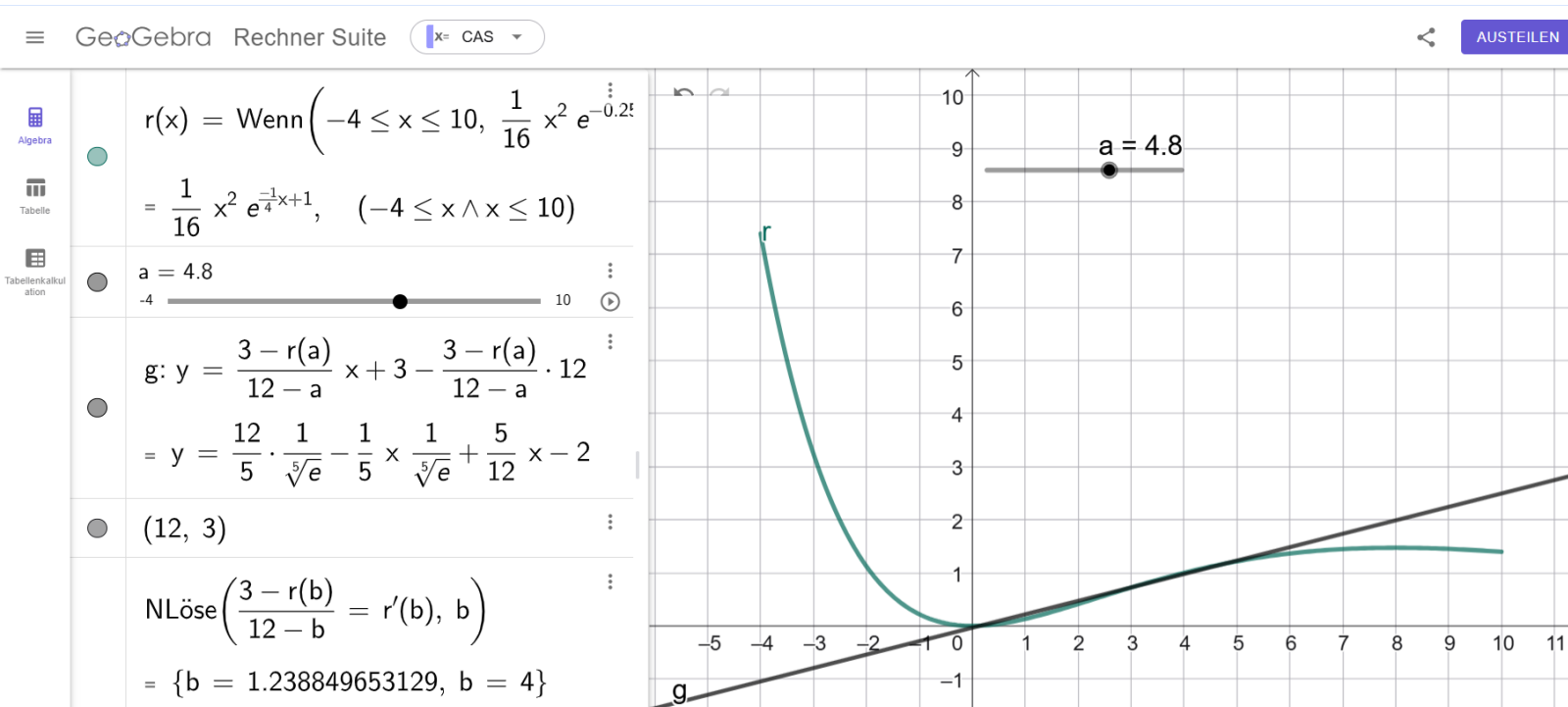
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen
- Fokussierungshilfe



R

TU Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

P

Workshop Übersicht

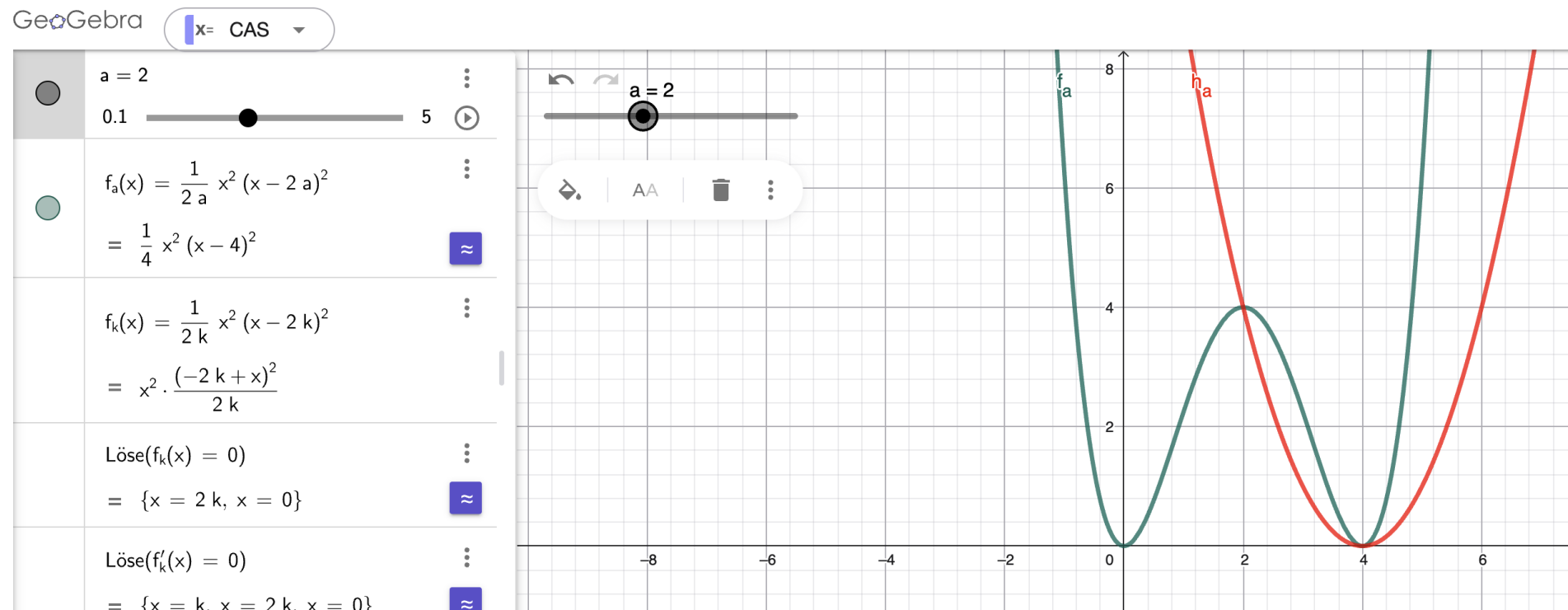
1. Vortrag GeoGebra im schriftlichen Abitur
2. Vertiefung an Beispielaufgabe
3. Arbeitsphase
4. Zusammenfassung

- **Aufgaben, für deren Bearbeitung ein MMS vorgesehen ist, sollen die im Vergleich zu einem einfachen WTR wesentlich umfangreichere Funktionalität des MMS berücksichtigen. So sollten typische Funktionen des MMS (z. B. zum algebraischen Rechnen, Durchführen von Berechnungen in Tabellen, Darstellen von Graphen) bei der Bearbeitung der Aufgaben zum Tragen kommen. Dabei sollen mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Vorstellungen sowie deren Anwendung mit mathematischem Verständnis geprüft werden, nicht die bloße Fähigkeit, dem MMS die Lösung einer Aufgabe zu entnehmen. (IQB – Aufgabenanforderungen)**
- **Analysisaufgaben bestehen in der Regel aus zwei Teilen: innermathematisch (meist Schar von Funktionen) und Anwendung.**
- **Bei Analytischer Geometrie und Stochastik bestehen keine oder nur geringe Unterschiede zwischen WTR und MMS-Aufgabe.**
- **Aufgabenteile unabhängig voneinander, aber Informationen aus vorherigen Teilen müssen weiter berücksichtigt werden.**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2 \cdot (x - 2k)^2 \text{ und } k \in \mathbb{R}^+.$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.



a) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat und geben Sie diese an. (3 BE / I)

Naheliegende Lösung: Argumentation am Funktionsterm:

Der Term ist ein Produkt aus drei Faktoren. Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

$\frac{1}{2k} \neq 0$, da $k \in \mathbb{R}^+$ ist, $x^2 = 0$ für $x = 0$ und $(x - 2k)^2 = 0$ für $x = 2k > 0$, da $k \in \mathbb{R}^+$ ist.

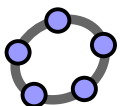
Lösungsvariante: Geogebra-CAS

Zu ermitteln sind die Nullstellen der Schar. Löse($f_k(x) = 0, x$) liefert $x_1 = 0$ oder $x_2 = 2k$.

Da $k \in \mathbb{R}^+$, sind die beiden Nullstellen verschieden.

Löse($f_k(x) = 0$)
= $\{x = 2k, x = 0\}$

⋮



b) Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand. (4 BE / II)

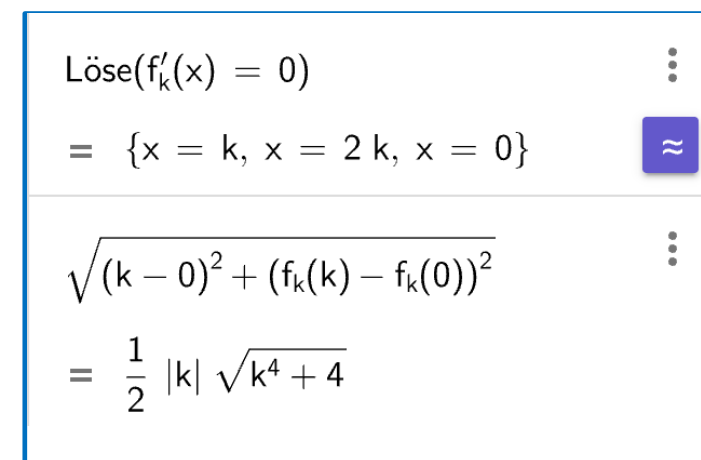
Die notwendige Bedingung $f'_k(x) = 0$ liefert die Extremstellen $x_{E_1} = 0, x_{E_2} = k$ und $x_{E_3} = 2k$.
(Geogebra-CAS)

Bemerkung: Eine Überprüfung der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

Die Graphen G_k sind wegen des Globalverhaltens ($k > 0$) achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y -Achse durch den Hochpunkt.

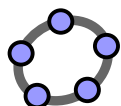
Der Abstand d ergibt sich mit dem Satz von Pythagoras:

$$d = \sqrt{(k - 0)^2 + (f_k(k) - f_k(0))^2} = \frac{k}{2} \cdot \sqrt{k^4 + 4} \quad (k > 0)$$



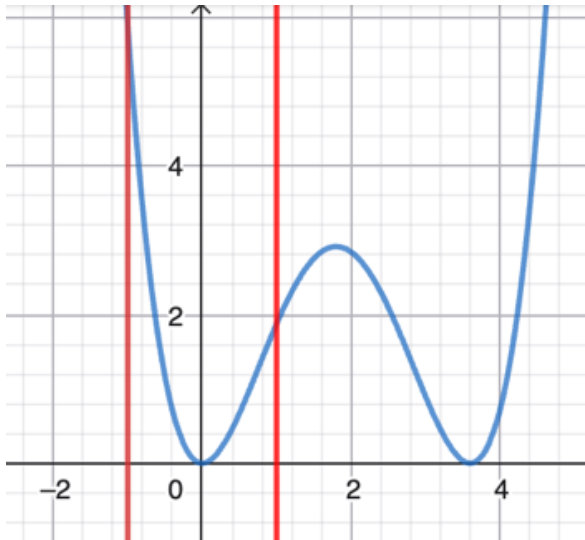
Löse($f'_k(x) = 0$)
 $= \{x = k, x = 2k, x = 0\}$

$\sqrt{(k - 0)^2 + (f_k(k) - f_k(0))^2}$
 $= \frac{1}{2} |k| \sqrt{k^4 + 4}$



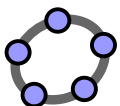
c) Betrachtet wird die Fläche, die G_k , die x -Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert des Integrals zu berechnen:

Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^1 f_k(x) dx$ den Inhalt der betrachteten Fläche an. (4 BE / II)



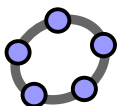
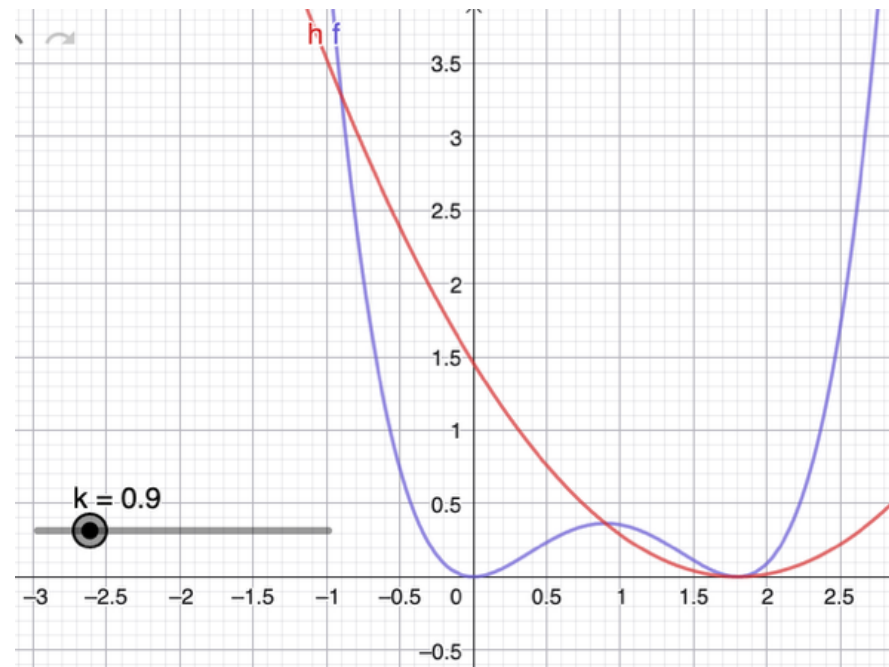
An der Skizze ist erkennbar, dass die betrachtete Fläche vollständig oberhalb der x -Achse liegt. Dies liegt daran, dass alle Faktoren $\frac{1}{2k}$, x^2 , $(x - 2k)^2$ des Funktionsterms für $k > 0$ positiv sind.

Die Aussage ist also richtig.



d) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5 . (5 BE/III)



d) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5 .

- Berechnen der Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionsscharen
- Berechnung der beiden Flächenstücke
- Nachweis der Behauptung

$$\text{Löse}(f_k(x) = h_k(x))$$

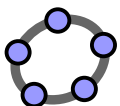
$$= \{x = k, x = -k, x = 2k\}$$

$$\int_{-k}^k h_k(x) - f_k(x) dx + \int_k^{2k} f_k(x) - h_k(x) dx$$

$$= \frac{29}{10} k^4$$

$$\text{Löse}\left(\frac{29}{10} k^4 < k^5\right)$$

$$= \left\{k > \frac{29}{10}\right\}$$



Workshop Übersicht

1. Vortrag GeoGebra im schriftlichen Abitur
2. Vertiefung an Beispielaufgabe
3. Arbeitsphase
4. Zusammenfassung

Und jetzt sind Sie dran:

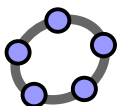
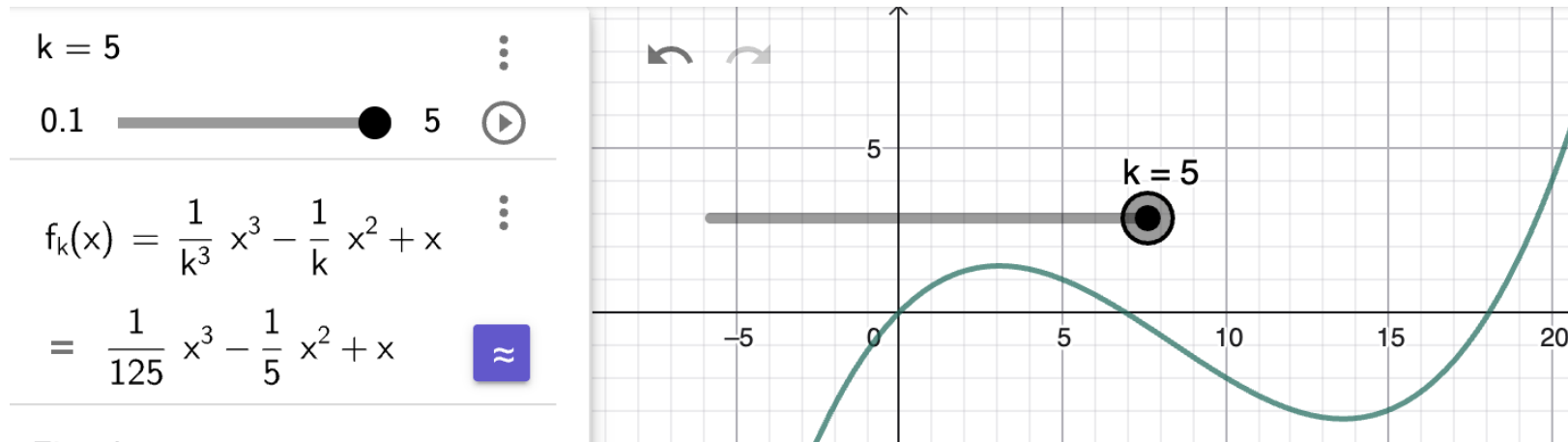
**Mai 2024 Analysis MMS 2
Teilaufgaben 1a-e**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{a^3} \cdot x^3 - \frac{1}{a} x^2 + x \text{ und } a \in \mathbb{R}^+.$$

- a) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat. (3 BE/I)
- b) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $(2|2)$ auf dem Graphen von f_a liegt. (2 BE/II)
- c) Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2 .
Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar liegt. (5 BE/II)
- d) Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen 0 und $\frac{a^2 + \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$ und $\frac{a^2 - \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$. Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme. (4BE/II)
- e) Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y -Koordinate. (5BE/II)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^3} \cdot x^3 - \frac{1}{a} x^2 + x$ und $a \in \mathbb{R}^+$.



a) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat.

$$\begin{aligned} f(a, x) &= \frac{1}{a^3} x^3 - \frac{1}{a} x^2 + x \\ &= \frac{-x^2}{a} + x + \frac{x^3}{a^3} \end{aligned}$$

Definition der Funktionenschar als Funktion mit 2 Parametern.

$$\text{Ableitung}(f(4, x))$$

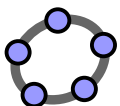
Operator „berechne“ erfordert die Niederschrift des Lösungsweges.

$$= \frac{3}{64} x^2 - \frac{1}{2} x + 1$$

$$\text{Löse} \left(\text{Ableitung}(f(4, x)) = -\frac{1}{4} \right)$$

Die Ableitung von f_4 ist zu bilden und soll den Wert $-\frac{1}{4}$ annehmen.
Löse-Befehl von Geogebra verwenden.

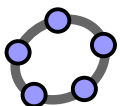
$$= \left\{ x = 4, x = \frac{20}{3} \right\}$$



b) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $(2|2)$ auf dem Graphen von f_a liegt.

$$\begin{aligned} &\text{Löse}(f(a, 2) = 2, a) \\ &= \{a = -\sqrt{2}, a = \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Die negative Lösung entfällt, da $a > 0$ nach Voraussetzung.



**c) Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2 .
Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar liegt.**

$$\text{Löse}(f(1, x) = f(2, x))$$

$$= \left\{ x = 0, x = \frac{4}{7} \right\}$$

$$f(1, 0)$$

$$= 0$$

$$f(2, 0)$$

$$= 0$$

$$f\left(1, \frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{148}{343}$$

$$f\left(2, \frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{148}{343}$$

$$f(a, 0)$$

$$= 0$$

$$f\left(3, \frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{4348}{9261}$$

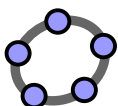
Die gemeinsamen Punkte von f_1 und f_2 sind $(0|0)$

und $\left(\frac{4}{7} \mid \frac{148}{343}\right)$.

$f_a(0) = 0$ unabhängig von a .

$$f_2\left(\frac{4}{7}\right) \neq f_3\left(\frac{4}{7}\right).$$

Somit ist $(0|0)$ der einzige gemeinsame Punkt aller Graphen
Der Schar.

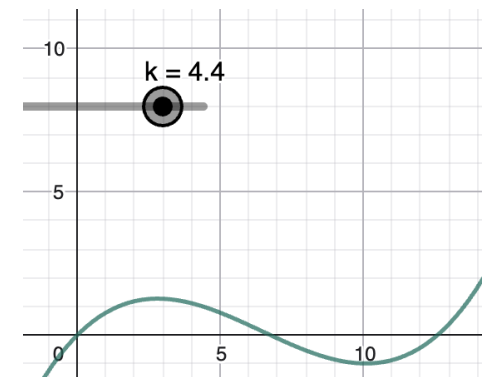
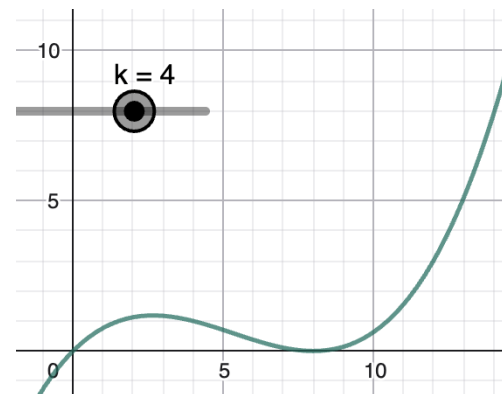
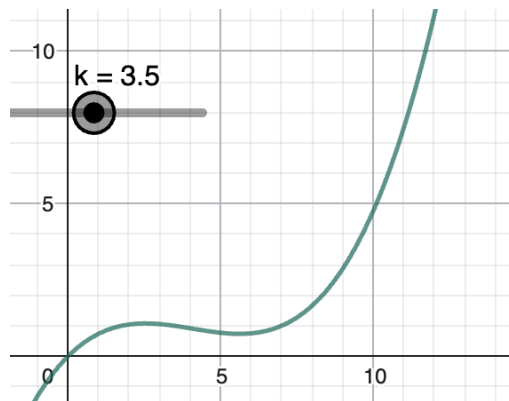


d) Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen 0 und $\frac{a^2 + \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$ und $\frac{a^2 - \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$. Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme.

Der Radikant ist 0 für $a = 4$, negativ für $0 < a < 4$ und positiv für $a > 4$.

Also hat die Gleichung

- für $a = 4$ zwei Nullstellen,
- für $0 < a < 4$ eine Nullstelle und
- für $a > 4$ drei Nullstellen.



e) Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y -Koordinate.

$$\text{Löse}(\text{Ableitung}(f(a, x), x, 2) = 0)$$

$$= \left\{ x = \frac{1}{3} a^2 \right\}$$

Bestimmen der Wendestelle mit der 2. Ableitung.

$$f\left(a, \frac{1}{3} a^2\right)$$

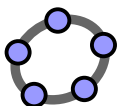
$$= \frac{-2}{27} a^3 + \frac{1}{3} a^2$$

y -Koordinate der Wendestelle

$$\text{Löse}\left(\text{Ableitung}\left(f\left(a, \frac{1}{3} a^2\right) = 0, a\right)\right)$$

$$= \{a = 3\}$$

Bestimmen des Maximums mit der Ableitung.



Workshop Übersicht

1. Vortrag GeoGebra im schriftlichen Abitur
2. Vertiefung an Beispielaufgabe
3. Arbeitsphase
4. Zusammenfassung

Werkzeugkompetenzen

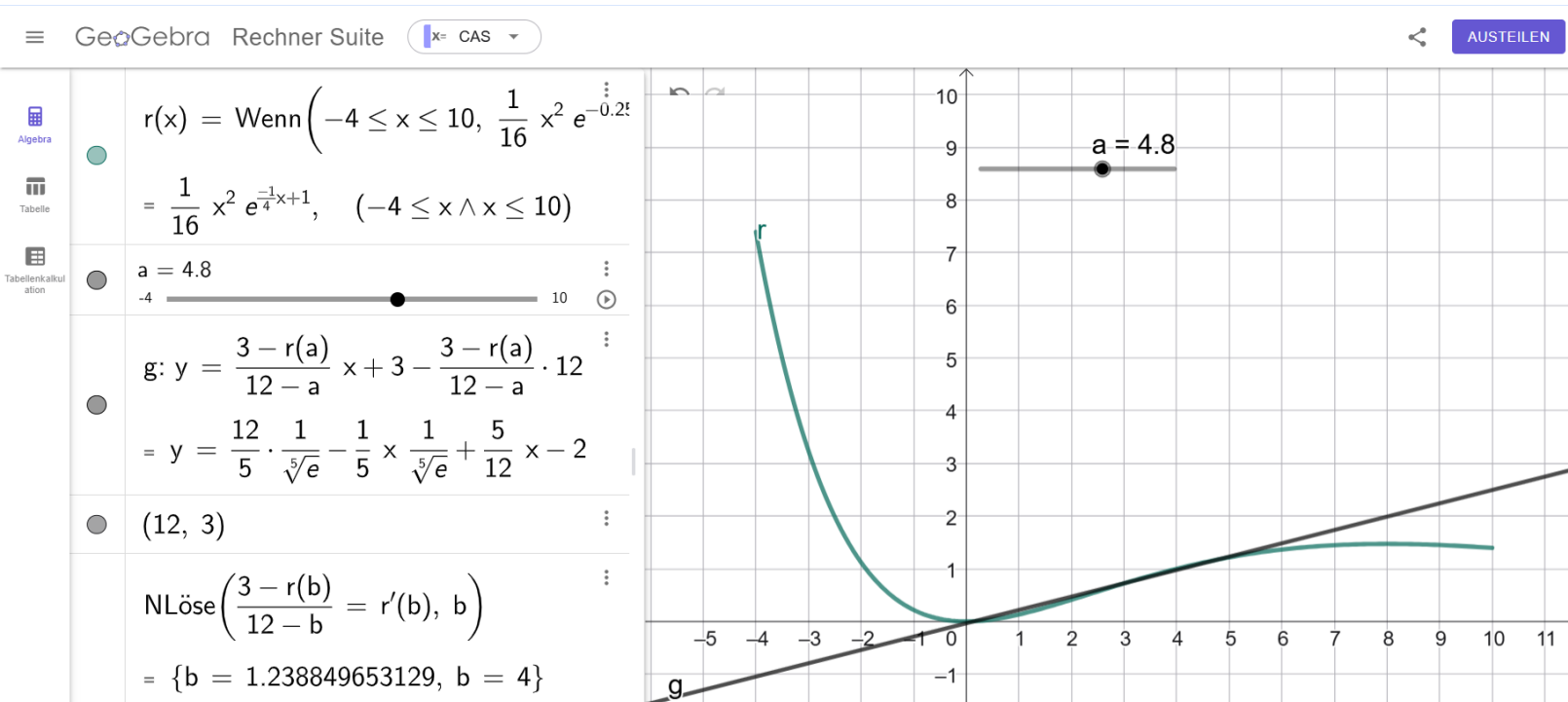
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen
- Fokussierungshilfe



Aufgabe

Dokumentation

Auswahl

Bedienung

Benutzer-
oberfläche

Handeln & Erproben

Feedback

Mathematik



- Mathematische Objekte und Konzepte
- Grundvorstellungen
- Mathematische Strategien
- ...

Alternativen finden
und Entscheiden



Rückschau



Bewusstmachen
wichtiger Aspekte



Reflexion während Bearbeitung

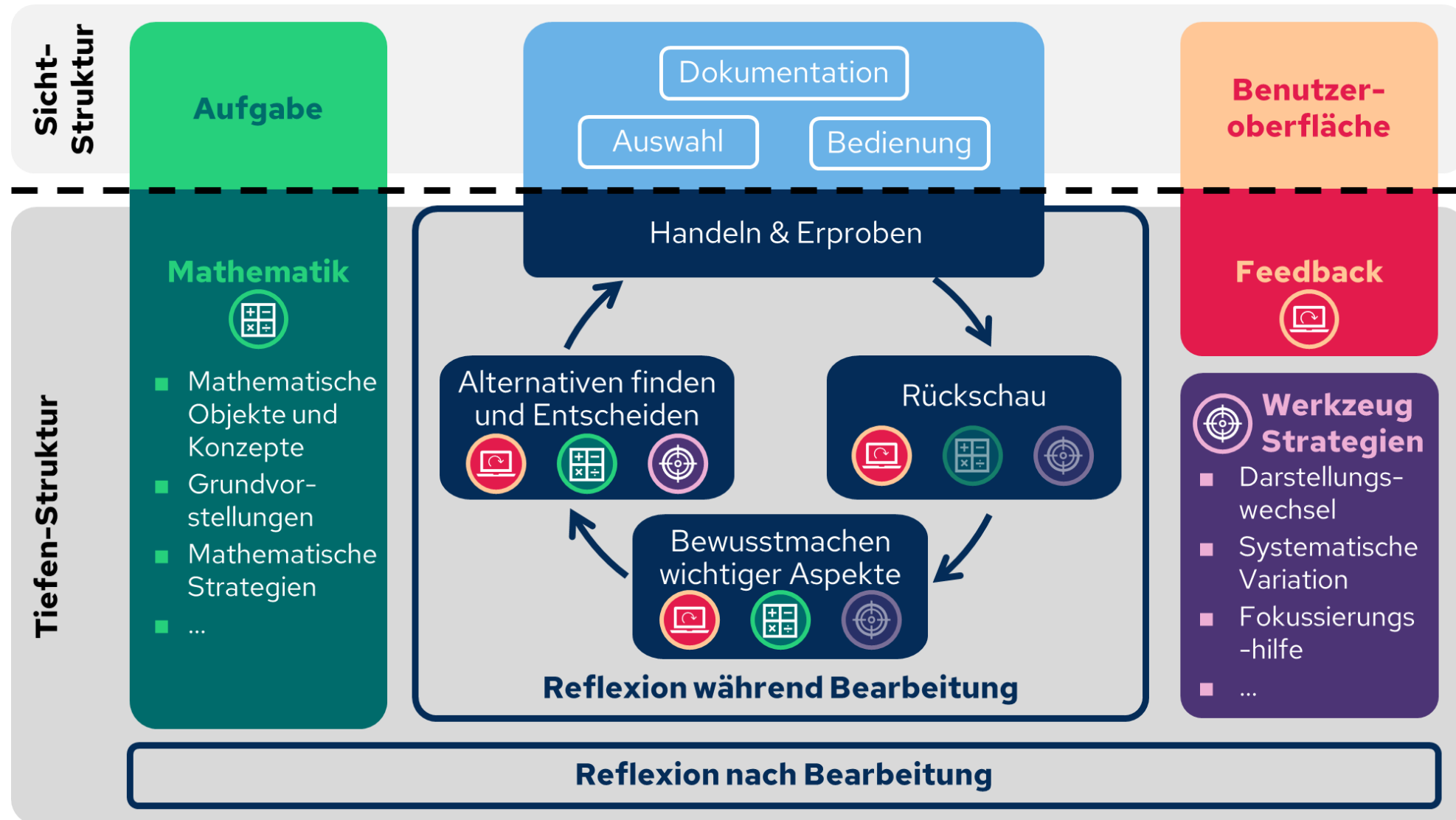


Werkzeug
Strategien

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Fokussierungshilfe
- ...

Reflexion nach Bearbeitung

Hilfreiche Denkprozesse beim Lösen von Abituraufgaben mit GeoGebra



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

**Armin Baeger &
Jan Lucas Fischer**

abaeger@kubagym.org

jl.fischer@rptu.de



RPTU