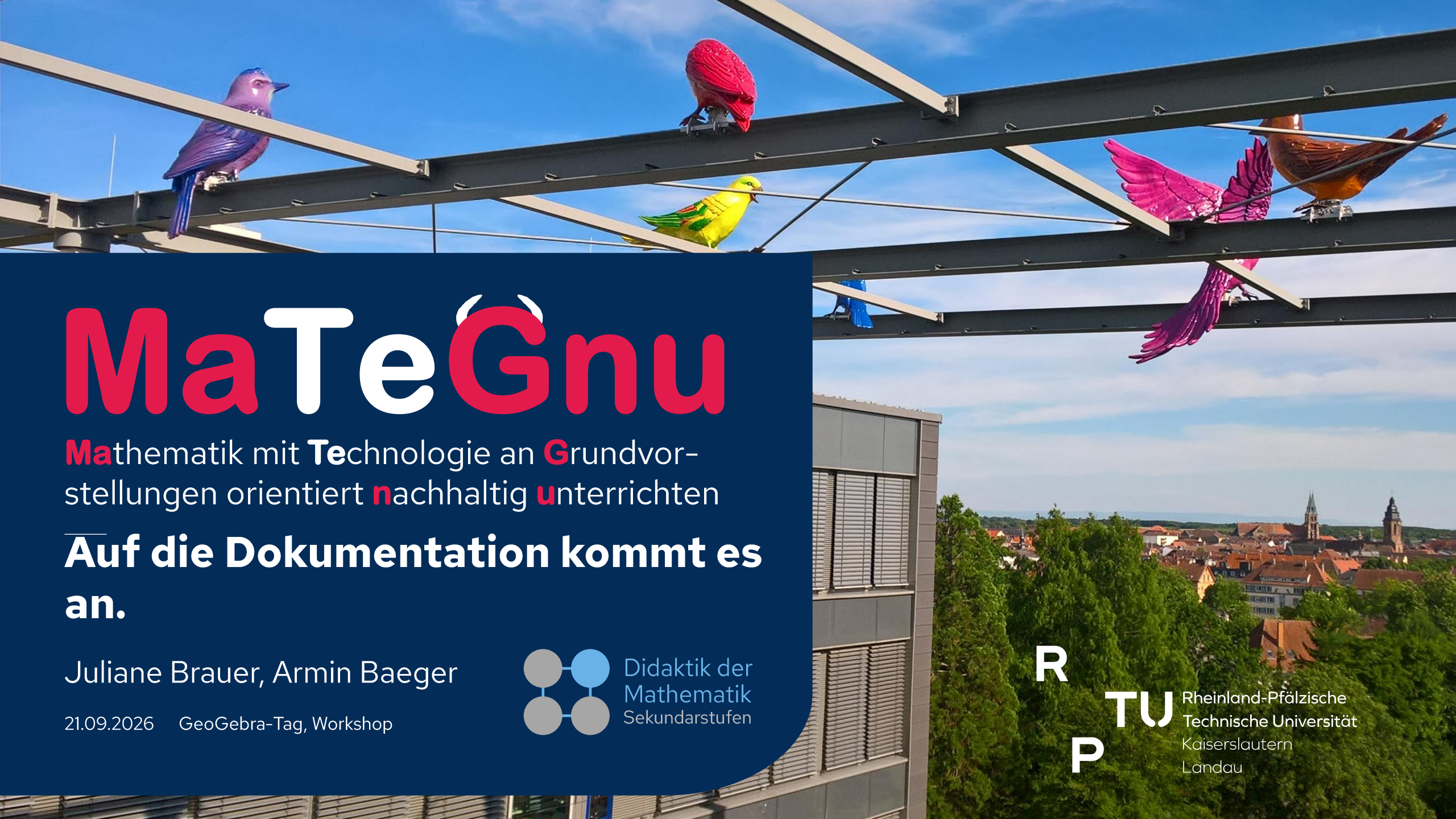




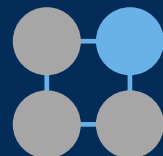
MaTeGnu

Mathematik mit **T**echnologie an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten

Auf die Dokumentation kommt es an.

Juliane Brauer, Armin Baeger

21.09.2026 GeoGebra-Tag, Workshop



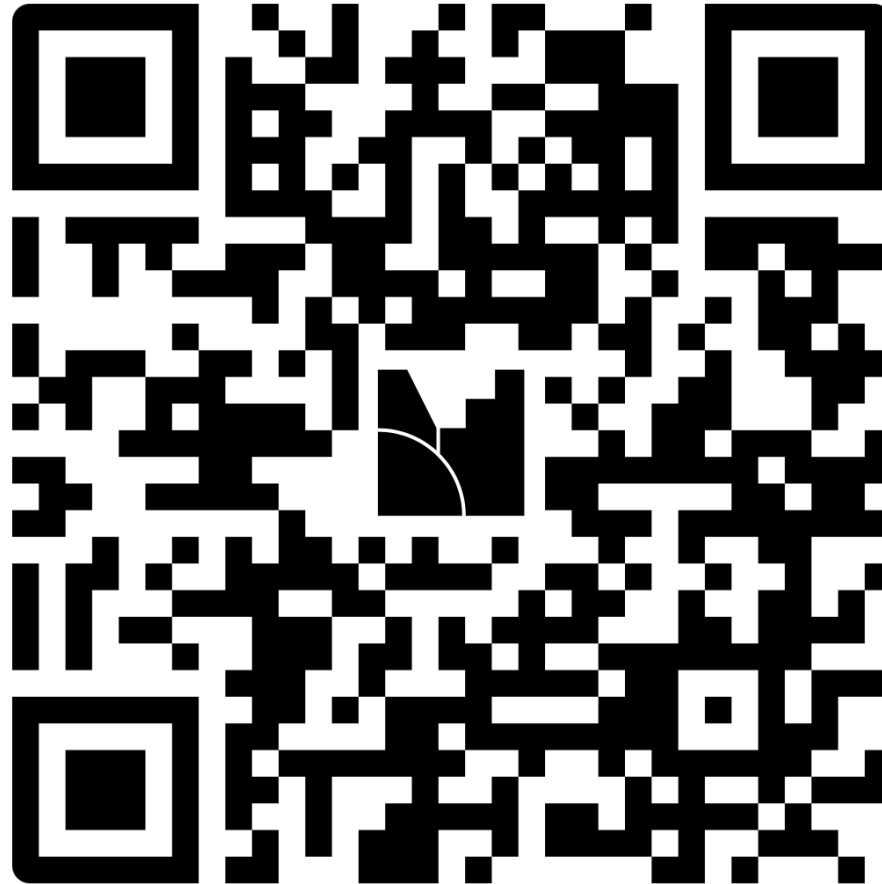
Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R

TU

P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



[Click to download as image](#)



Auf die Dokumentation kommt es an.

1. Warum ist Dokumentation so wichtig?
2. Welche Anlässe der Dokumentation sind zu unterscheiden?
3. Beispiel: „Aufgabe Kursarbeit“
4. Was kann/muss die Lehrkraft tun?

Warum ist die Dokumentation so wichtig?

**Dokumentieren ist Teil des mathematischen Lernprozesses:
Die Niederschrift spiegelt den Reflexionsprozess.**

1) Bei der **Erarbeitung neuer Inhalte:**

Sicherung der Unterrichtsergebnisse als Grundlage zum Wiederholen

2) Bei **dem Erkundenden Lernen:**

Dokumentation der Lösungsschritte und des Einsatzes der Hilfsmittel als Grundlage der nachfolgenden Präsentation

3) Bei der **Bearbeitung von Aufgaben:**

Lösungswege und der Einsatz von GeoGebra müssen von anderen nachvollzogen werden können

Warum ist die Dokumentation so wichtig? MaTeGnu

BiSta AHR (2012):

Erläuternde, kommentierende und begründende **Texte** sind **unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung**. Dies gilt auch für die **Dokumentation** des Einsatzes elektronischer Werkzeuge.

BiSta MSA (2022):

Ziel ist ein **gesichertes Verständnis mathematischer Inhalte**. Erreicht wird dieses durch das Lesen und **Schreiben mathematischer Texte** und das **Sprechen über mathematische Inhalte** im. Der Unterricht hat die Dokumentation und Präsentation von Lernergebnissen zum Ziel.

2

**Welche Anlässe der
Dokumentation sind zu
unterscheiden?**

Welche Anlässe der Dokumentation sind zu unterscheiden?

- 1.) Dokumentation bei der Erarbeitung neuer Inhalte /Fachbegriffe /Regeln
- 2.) Dokumentation bei dem Erkundenden Lernen
- 3.) Dokumentation von Aufgabenbearbeitungen
 - Im Alltag bei Hausaufgaben etc.
 - In Prüfungen



Arbeitsauftrag:

Diskutieren Sie, welche Aspekte bei der Dokumentation eine Rolle spielen. Welche Unterschiede sehen Sie für die o.g. Bereiche?

1) Dokumentation bei der Erarbeitung neuer Inhalte

- Die Arbeit mit GeoGebra ist stärker angeleitet und gelenkt.
- Die Schülerinnen und Schüler notieren eigenständig Teilergebnisse.
- Wichtige Punkte werden gemeinsam mit der Lehrkraft formuliert und notiert.
- Screenshots der GeoGebra-Ergebnisse werden dem Hefteintrag beigefügt
- Beispiel: Extrem- und Sattelpunkte

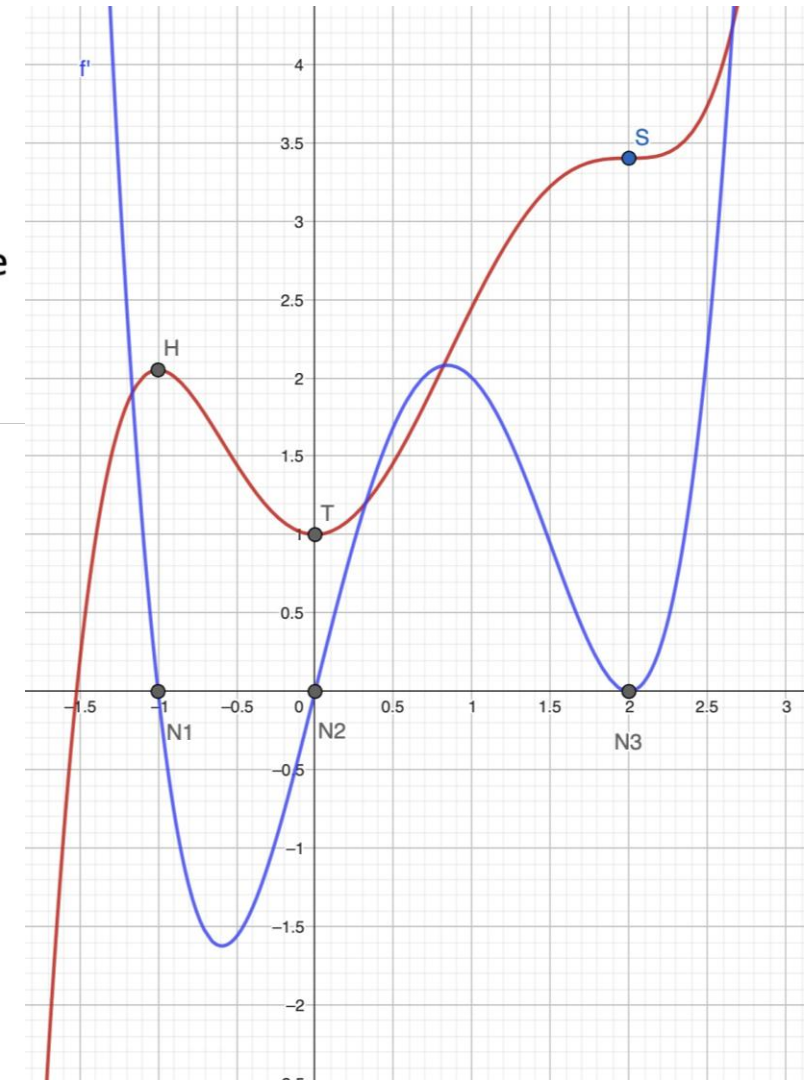
Aufgabe 1:

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 + 1$ ist gegeben.

- Bestimme mit Geogebra alle Stellen, für die gilt $f'(x) = 0$
- Zeichne mit Geogebra die Graphen von f und f' . Zeichne bei der Funktion f auch die Punkte mit waagerechter Tangente ein.
Füge hier einen Screenshot der Graphen ein:

- Was lässt sich über die Steigung in der Nähe der Punkte mit waagerechter Tangente sagen?
Wie ändert sich die Steigung? Notiere deine Ergebnisse in der Tabelle:

	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$
Vorzeichen der Steigung links und rechts des Punktes			
Bezeichnung des Punktes			



2) Dokumentation beim Erkundenden Lernen

- Die Schülerinnen und Schüler notieren ihre Ergebnisse vorwiegend selbstständig.
- Das Vorgehen und Zwischenergebnisse werden stichwortartig protokolliert.
- Die Ergebnisse werden als vollständige Sätze formuliert.
- Eine Überschrift und Screenshots der GeoGebra-Ergebnisse werden dem Hefteintrag beigefügt.
- Beispiel: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

<https://www.GeoGebra.org/m/pknvrv4g#material/knwwfr2e>

Leitfaden zur Dokumentation des Unterrichts für Schüler*innen

Damit Du die einzelnen Schritte der Erarbeitung der Unterrichtsinhalte später besser nachvollziehen kannst, ist es sinnvoll, diese schriftlich festzuhalten. Zu einer gelungenen Unterrichtsdokumentation gehören die folgenden Aspekte:

1. Notiere die Frage- bzw. Aufgabenstellung.
2. Notiere (stichwortartig) Deine eigenen Gedanken.
3. Halte Deine Lösungsansätze mit Hilfe von Skizzen, Screenshots, Stichpunkten, Rechnungen etc. fest
4. Beziehe evtl. auch Erkenntnisschritte (AH-Momente) anderer in Deine Lösungsfindung ein
5. Halte das Ergebnis schriftlich fest.

3) Dokumentation von Aufgabenbearbeitungen

- Der Lösungsweg wird vollständig dokumentiert.
- Mindestanforderungen an eine angemessene Dokumentation von Lösungen:
 - 1) **Die Lösungsschritte müssen gut nachvollziehbar sein und erläutert werden.** Dazu gehören kommentierte Lösungsansätze und das Notieren von Zwischenschritten.
 - 2) Es ist grundsätzlich die **korrekte mathematische Fachsprache** zu verwenden.
 - 3) Die **Angabe rechnerpezifischer Befehle sollte sparsam** gebraucht werden. Aber es muss bei der Lösungsdarstellung ersichtlich sein, wo das Werkzeug wie benutzt worden ist.
 - 4) **Rechnerausgaben** müssen unter Bezug auf die Aufgabenstellung angemessen **interpretiert** werden.
 - 5) Beim Einsatz von MSS/GeoGebra sollte die **Dokumentation nicht wesentlich umfangreicher** sein als bei Nutzung anderer Werkzeuge.

3

**Beispiel:
„Aufgabe Kursarbeit“**

Für den Kindergarten in Ruwer entwirft der Mathe-LK eine neue Rutsche. Das Profil der Rutsche wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2,5$ im Bereich $0 \leq x \leq 3$ beschrieben. Die x –Achse entspricht in diesem Modell dem Boden. (Eine LE entspricht 1 m.)



Um Unfälle zu vermeiden, besagt eine Sicherheitsvorschrift, dass Anfang und Ende der Rutsche horizontal verlaufen müssen. Untersuchen Sie, ob die Vorschrift eingehalten wird.

Kommentierter Lösungsansatz:

Ein horizontaler Verlauf zu Beginn und am Ende der Rutsche bedeutet, dass die Steigung an diesen Stellen null sein muss.

Korrekte mathematische Fachsprache:

z.z.: $f'(0) = 0$ und $f'(3) = 0$

<https://www.GeoGebra.org/m/r7xbgrp>

Erläutern des Vorgehens und des Einsatzes von Geogebra:

Im Graphikrechner wird mit dem Befehl f' die Ableitungsfunktion dargestellt.

Mit dem Befehl *Nullstelle* (f') werden die Nullstellen der Ableitungsfunktion bestimmt.

Geogebra liefert: $x = 0$ und $x = 3$.

Interpretation des Ergebnisses/Bezug zum Sachkontext:

Da die Steigung an den Stellen $x = 0$ und $x = 3$ null ist, wird die Sicherheitsvorschrift eingehalten.

Dokumentation von Lösungen mit Geogebra

Allgemein

→ Kurz, sachlich, präzise, vollständig

Absolut notwendig

1. Kommentierter Lösungsansatz

- a.) mit Worten erklären, was gesucht ist / was zu zeigen ist
- b.) mathematisch korrekt formulieren, was zu zeigen ist (in die Sprache der Mathematik übersetzen)

2. Geogebra-Rechner

- nennen, welcher Geogebra-Rechner zur Lösung eingesetzt wird:
CAS / Graphikrechner / 3D-Rechner...

3. Geogebra-Befehle

- a.) notieren, welche Befehle benutzt werden und was genau in Geogebra eingegeben wird
- b.) aufschreiben, welches Ergebnis Geogebra mit dem Befehl liefert

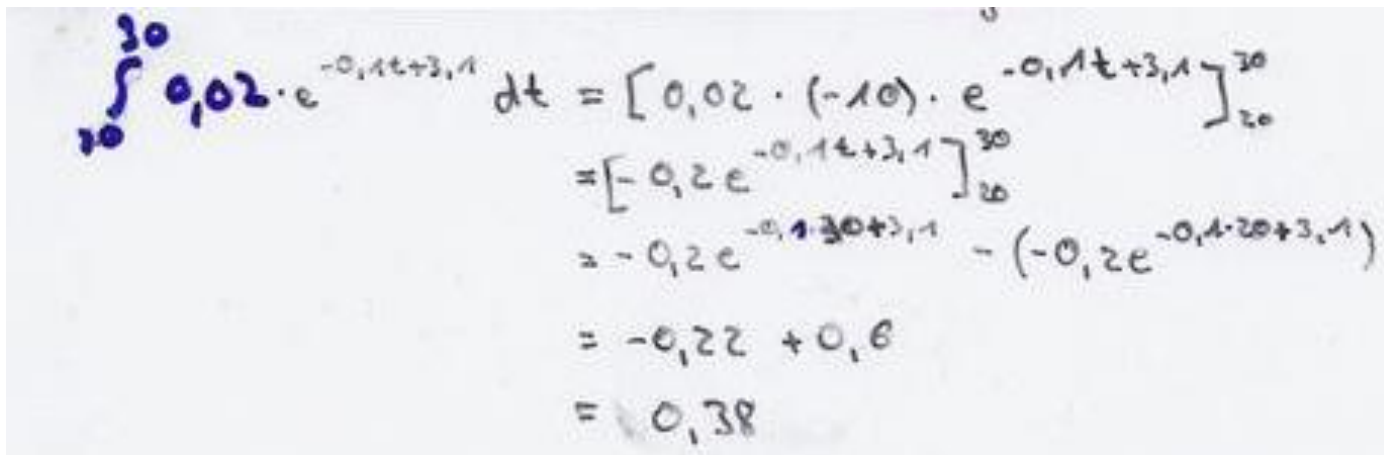
4. Ergebnis interpretieren

- Das Geogebra-Ergebnis muss (im Sachzusammenhang) interpretiert werden.

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

$$\text{Löse}(\{f(2) = 0, f(-2) = 0, f(0) = 2, f'(2) = 0\}, \{a, b, c, d\})$$

$$= \left\{ \left\{ a = \frac{1}{4}, b = \frac{-1}{2}, c = -1, d = 2 \right\} \right\}$$



Handwritten calculation of a definite integral:

$$\begin{aligned} \int_{10}^{30} 0,02 \cdot e^{-0,1t+3,1} dt &= [0,02 \cdot (-10) \cdot e^{-0,1t+3,1}]_{10}^{30} \\ &= [-0,2 e^{-0,1t+3,1}]_{10}^{30} \\ &= -0,2 e^{-0,1 \cdot 30 + 3,1} - (-0,2 e^{-0,1 \cdot 10 + 3,1}) \\ &= -0,22 + 0,6 \\ &= 0,38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \text{IntegralZwischen}(fk, hk, -k, k) \\ &= -14 \cdot \frac{k^4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x) &= \text{IntegralZwischen}(fk, hk, k, 2k) \\ &= \frac{k^4}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= -a + b \\ &= \frac{29}{10} k^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fk(x) &= \frac{1}{2k} x^2 (x - 2k)^2 \\ &= x^2 \cdot \frac{(-2k + x)^2}{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hk(x) &= \frac{k}{2} (x - 2k)^2 \\ &= \frac{1}{2} k (-2k + x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkt}(fk, hk) \\ &= \left\{ \left(k, \frac{1}{2} k^3 \right), \left(-k, \frac{9}{2} k^3 \right), (2k, 0) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Löse}(c < k^5, k) \\ &= \left\{ k > \frac{29}{10} \right\} \end{aligned}$$

4

**Was kann/muss die
Lehrkraft tun?**

1. Erwartungen kommunizieren:

- Mindestanforderungen an eine angemessene Dokumentation von Lösungen besprechen.
- Operatoren des IQB mit den Schülerinnen und Schülern in Bezug auf diese Anforderungen thematisieren.

2. Motivieren:

- Positive Beispiele hervorheben
- Einsatz und Verbesserungen im Lernprozess loben
- Lehrkraft als Vorbild
- In Klausuren: Punkte für die Dokumentation geben

3. Bewusstmachen:

- Bedeutung der Dokumentation herausstellen
- Gute Lösungen und Negativbeispiele diskutieren
- Korrektürkürzel DOK

4. Festigen:

- Dokumentation bei jeder Hausaufgabe und jedem Test einfordern
- Permanent thematisieren: Immer wieder gute Beispiele und Musterlösungen geben
- Aufgaben der Schülerinnen und Schüler einreichen lassen und korrigieren

- Unser Standpunkt: Standards für die Lösungsdokumentation sind dringend erforderlich
- Fachdidaktik entwickelt bisher keine allgemein kalkülmäßig festzulegenden Regeln für die Lösungsdarstellung bei der Nutzung von MMS / CAS
- Es gibt wenige publizierte Beiträge (s. Literaturhinweise im Anhang).

- 1. Operatoren haben eine entscheidende Bedeutung für die Art der Lösungsdokumentation**
 - genaue Kenntnis der Operatoren und der damit verbundenen Erwartungen an die Lösung ist elementar wichtig
- 2. Soll händisch gerechnet werden, muss dieses ausdrücklich im Aufgabentext formuliert werden**
- 3. Reine Rechenfertigkeiten können in hilfsmittelfreien Teilen geprüft werden**
- 4. Problemlösen, Modellieren und Dokumentieren ist für die Schülerinnen und Schüler schwierig, weil es neu ist.**
 - es muss schrittweise eingeführt und geübt werden
 - auch in Prüfungen soll experimentelles Arbeiten vorkommen und gut dokumentiert werden



- 1. Untersuchen Sie die Lösungen der Schülerinnen und Schüler in Hinblick auf die Kriterien zur Dokumentation (rotes Blatt: ausführliche Version, gelbes Blatt: Kurzversion)**
- 2. Überlegen Sie gemeinsam, welches Feedback sie den Schülerinnen und Schüler geben würden.**
- 3. Erstellen Sie für Ihre Fachgruppe eine eigene Vorlage zur Dokumentation von Aufgaben mit GeoGebra.**

- Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)
- Beck, Johannes: Lösungsdokumentationen von Schülerinnen und Schülern im CAS-Abitur. In: Casio forum 1/2017 (online verfügbar)
- Heintz, G, Pinkernell, G, Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2016
- Hinrichs, Gerd: Von der analogen zur digitalen Heftführung. In: Mathematik lehren 233 (2022)
- Schacht, Florian: Mathematik zu Papier bringen: Dokumentationen im Lernprozess und in (Abitur)-Klausuren. In: Heintz, Gaby; Elschenbroich, Hans-Jürgen u.a.: Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Menden 2017.

„Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.“

(Hans Schupp)

„Nur der Mensch ist der Dokumentation fähig!“

(Friedrich Löchner)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Juliane Brauer

Max-Planck-Gymnasium Trier

Juliane.Brauer@mpg-trier.de

Armin Baeger

Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

abaeger@kubagym.org

<https://dms.nuw.rptu.de/mategnu>



RPTU