



MaTeGnu

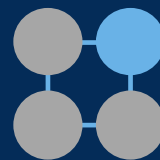
Mathematik mit Technologie
an Grundvorstellungen orientiert
nachhaltig unterrichten

Ws B2:

(Prüfungs-)Aufgaben mit GeoGebra: Gestaltung, Aufgabenstellung, Dokumentation

Alexander Lutz

26.09.2026 Fortbildung für Studienseminare



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R

TU

P

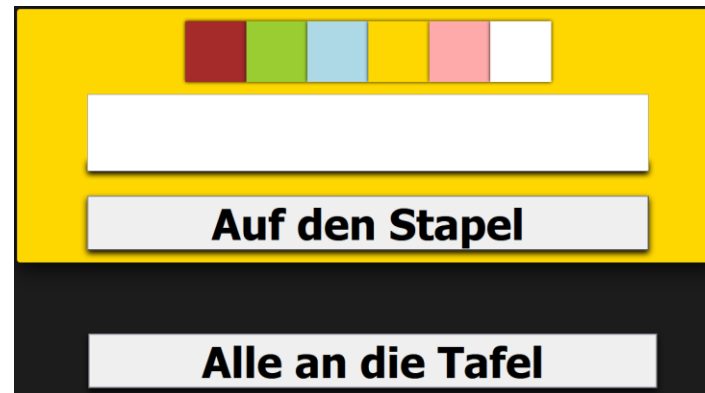
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Digitale Werkzeuge (wie etwa GeoGebra) in Tests, Klassen- und Kursarbeiten:



Ihre Gedanken dazu

Tauschen Sie sich zu zweit aus über Ihre **Hoffnungen**, **Befürchtungen** und **Überlegungen**.



<https://oncoo.de/n0j4>

(Prüfungs-)Aufgaben mit GeoGebra: Gestaltung, Aufgabenstellung, Dokumentation

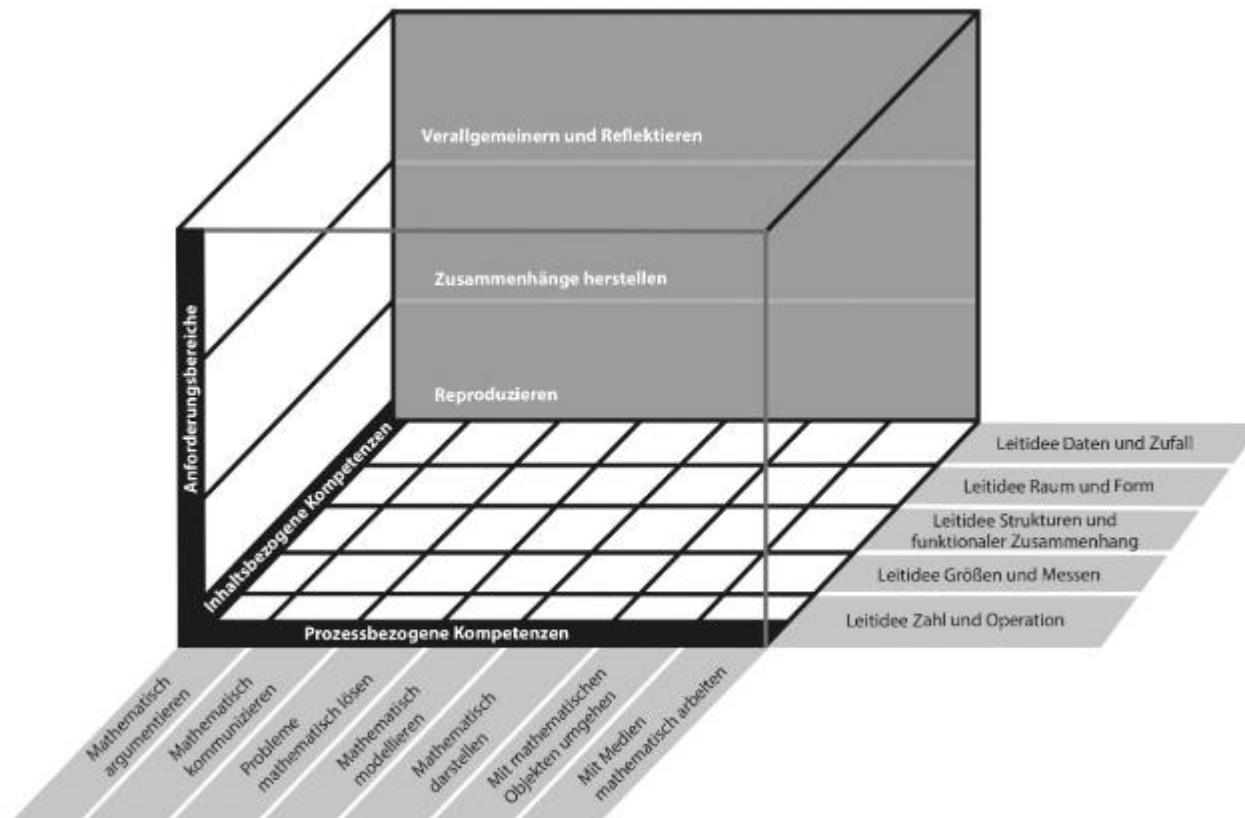
1. Aufgaben mit digitalen Werkzeugen
2. Lernen und Leisten
3. Verständnisorientierung
4. Prüfungen mit digitalen Werkzeugen
5. GeoGebra Prüfungsmodus
6. Dokumentation von Lösungen

1

Aufgaben mit digitalen Werkzeugen

Neuer Kompetenzbereich „Mit Medien mathematisch arbeiten“

- Fachliche Kompetenzen digital fördern - Lernen MIT Medien
- Digitale Kompetenzen fachlich fördern - Lernen ÜBER Medien



Kennenlernen
und Vertiefen
der Arbeit mit
Tabellenkalkulation

Vertiefen der Bruchrechnung
durch Reflektieren und
Strukturieren der nötigen
Rechenschritte (Algorithmus)

Du siehst hier eine „Bruchmultiplikations-Maschine“. Erstelle selbst eine „Bruchdivisions-Maschine“.

K17	A	B	C	D	E
10	Multiplikation von Brüchen				
11					
12	3	*	9	=	27
13	8		5		40
14					
15					

Digitale Lernumgebung



Konfiguration
vollständig vorgegeben

Strukturierungs- und
Fokussierungshilfen für alle
wesentlichen Aspekte
(z. B. Farbgebung, Linienstärken,
Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein- und
ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten
bewusst eingeschränkt.

Hybrid



Veränderbare
(Teil-)Konfiguration
vorgegeben

Kann / muss ergänzt oder
verändert werden

Nur einzelne
Strukturierungs- und
Fokussierungshilfen
vorhanden

Digitales Werkzeug



Leere,
unstrukturierte
MMS-Datei

MMS wird selbst-
ständig und ohne Vorgaben
benutzt

Erfordert
Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis**. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.



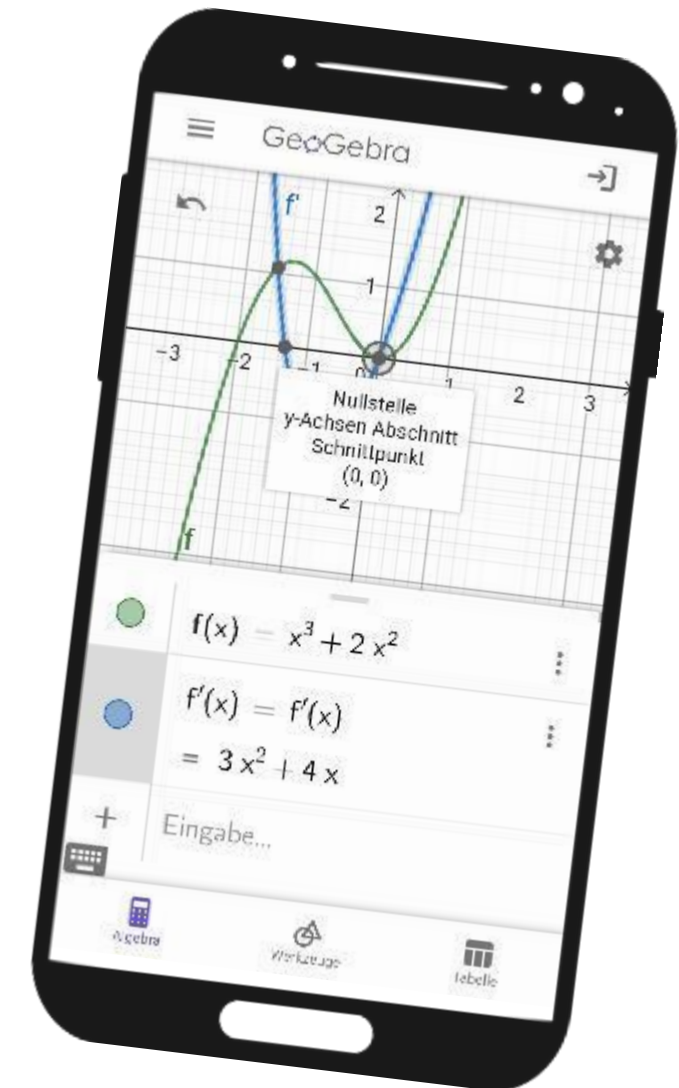
Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematikunterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme

und als deren Integration mit Vorgaben der KMK für das zentrale Abitur

- modulare Mathematikssysteme (MMS).



Aufgabe

Gib die Funktionsgleichung einer Funktion an, für die gilt:
Stelle deinen Lösungsweg nachvollziehbar dar.

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = 0$$

Sie sind dran!

Lösen Sie die Aufgabe **ohne** bzw. **mit** GeoGebra.

Notieren Sie jeweils welche Kompetenzen diese Aufgabe erfordert.



2

Lernen und Leisten

Prüfungen sollten ...

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lernpraktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

Prüfungen verdeutlichen ...

welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden
(Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der Bewertungseinheiten, erlaubte Hilfsmittel)

Assessment

should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.

NCTM: Principles und Standards for School Mathematics

Constructive Alignment

In **Prüfungen** muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den **Unterricht** qualitativ und quantitativ prägt.

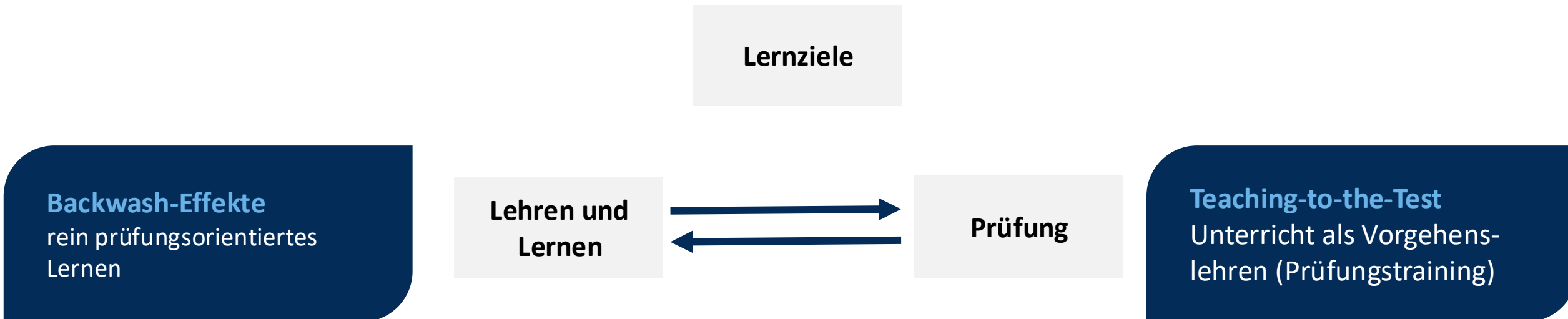
Henning Körner

Unterschiedliche Sichtweisen auf Lernziele

Lehrkraft formuliert Kompetenzentwicklung in Lernzielen für den Unterricht.

In Prüfung wird nur (prozedurales) Wissen abgefragt.

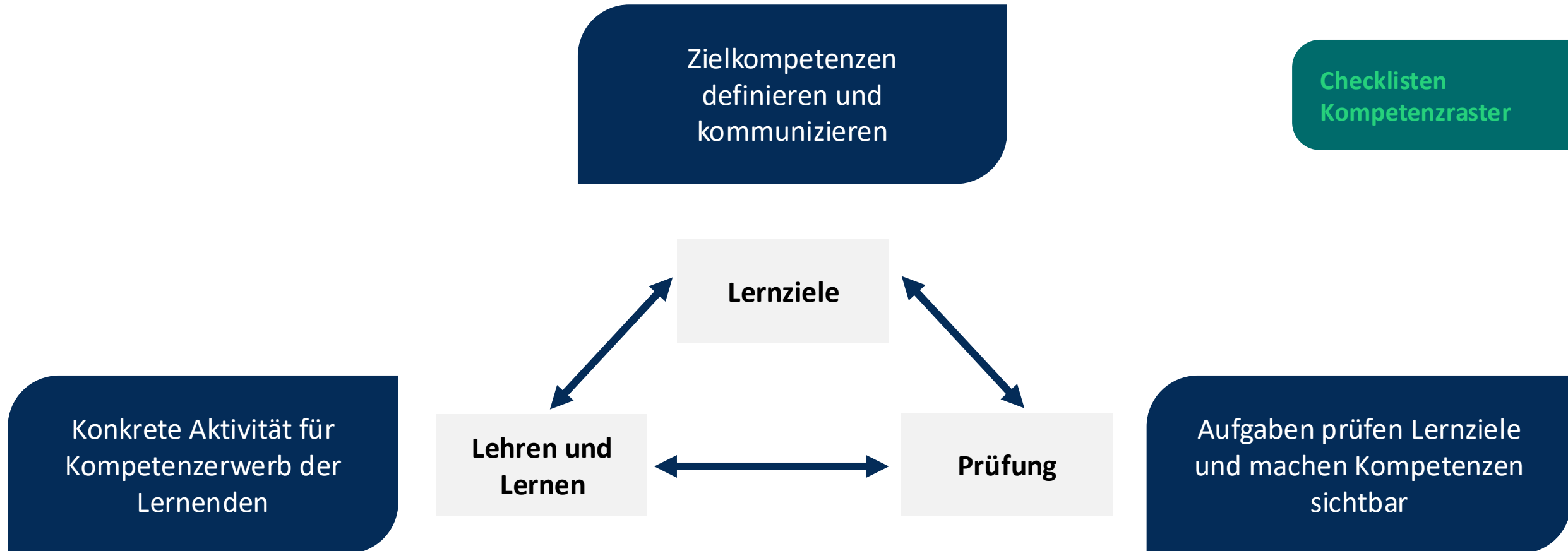
Für Lernende ist Auswendiglernen der Schlagworte und Verfahren sinnvoller Fokus.



Lehren und **Lernen**, **Lernziele** und **Prüfung** sind nicht im Gleichgewicht, nicht konstruktiv aneinander ausgerichtet
→ keine nachhaltige Kompetenzentwicklung; keine angemessenen Gelegenheiten zum Diagnostizieren und Fördern

Abstimmung von Lehr- und Lernmethoden sowie Prüfungsformen mit den angestrebten Lernzielen.

Ziel: Zieltransparent und Passung



3

Verständnisorientierung

Aufgabe

Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x + 2)^2 - 1 = 0$ b) $(x + 2)^2 + 2 = 0$ c) $(x + 2)^2 = 0$

Sie sind dran!

Lösen Sie die Aufgabe mit GeoGebra.

Notieren Sie welche Kompetenzen diese Aufgabe erfordert und welche „von GeoGebra abgenommen“ werden.



Oberflächlich

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen	
Konzeptuell	Prozedural
▪ Fakten abrufen, angeben, beschreiben ▪ Wiedergeben, nennen, benennen ▪ Aufzählen, Beispiele angeben	▪ Rechnen und Formeln nutzen ▪ Algorithmus/Verfahren ausführen ▪ Bestimmen, Ermitteln
2 Verstehen, Anwenden & Begründen	
Konzeptuell	Prozedural
▪ Erklären von Bedeutungen ▪ Begründen mathematischer Sachverhalte ▪ Vernetzen von Inhalten und Darstellungen ▪ Beispiele und Gegenbeispiele finden ▪ Formalisieren/Schematisieren ▪ Mathematisieren (mit Modell finden), Interpretieren	▪ Erläutern von Rechenwegen ▪ Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen/schätzen, Lösungsweg bewusst wählen ▪ Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell) ▪ Strategien nutzen ▪ Entscheiden ohne Begr., rechnerisch begründen & nachweisen, zeigen
3 Analysieren, Bewerten & Beweisen	
▪ Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten ▪ Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren ▪ Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren, Vergleichen ▪ Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben ▪ Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren, (Formal) Beweisen ▪ Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren	
4 Kreativ neu denken	
▪ Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen ▪ Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/Modelle/tragfähige Begriffe erfinden ▪ Neue Perspektiven einnehmen, Planen/Bearbeitungsprozesse strukturieren, Recherchieren ▪ Metakognitiv und kritisch reflektieren	

Tiefgehend

Aufgabe (mit GeoGebra)

Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x + 2)^2 - 1 = 0$ b) $(x + 2)^2 + 2 = 0$ c) $(x + 2)^2 = 0$

Erkläre den Zusammenhang der Gleichung zum erzeugten Graphen und identifiziere die Lösungen im Graph.

Gib weitere Gleichungen mit keiner, einer oder zwei Lösungen an.

Untersuche, ob es mehr als zwei Lösungen geben kann und begründe deine Antwort.

Bestimme allgemein, für welche Werte p und q die Gleichung $(x + p)^2 - q = 0$ keine, eine oder zwei Lösungen hat.

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus/Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

2 Verstehen, Anwenden & Begründen

Konzeptuell

- Erklären von Bedeutung
- Vernetzen von Darstellungen

Prozedural

- Begründen

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

„Produktiv ergänzen“

- Muster fortsetzen
- Strukturieren

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Reflektieren

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Generalisieren

Aufgabentyp	Gegeben	Weg	Gesucht
Grundaufgabe / einf. Bestimmungsaufgabe (Bestimme)	✓	✓	—
Vollständig (falsch) gelöste Aufgabe (Überprüfe... korrigiere)	✓	✓	✓
Einfache Umkehraufgabe (Formuliere eine passende Aufgabenstellung)	—	✓	✓
Schwierigere Umkehraufgabe (Formuliere eine passende Aufgabenstellung mit Bedingung ... und notiere den Lösungsweg)	—	—	✓
Strategiefindungs- / Begründungsaufgabe (Notiere und erläutere eine Lösung)	✓	—	✓
Schwierigere Bestimmungsaufgabe (Gib zwei unterschiedliche Lösungswege an und löse die Aufgabe)	✓	—	—
Eigene Aufgabenkonstruktion / eigene Anwendung finden (Formuliere eine Aufg. zur partiellen Integration/zum orientierten Flächeninhalt und löse sie)	—	✓	—
Offene Problemsituation (Gib eine Aufgabe zum Sachkontext an und löse sie mithilfe der Ableitung)	—	—	—

Was wird gefordert?	Beispiele für Aufgabentypen
Verständnis zur Mathematisierung nutzen	(1) Eine gegebene Sachsituation mathematisieren (vgl. Aufgabe 1 ➡) (2) Analysieren einer falschen Mathematisierung (vgl. Aufgabe 2 ➡)
Verständnis zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen	(3) Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild (vgl. Aufgabe 3 ➡) (4) Interpretieren eines mathematischen Ausdrucks im Sachkontext (vgl. Aufgabe 4.1 ➡ : Sachkontext → mathematischer Ausdruck und Aufgabe 4.2 ➡ : mathematischer Ausdruck → Sachkontext)
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliches Verständnis erklären	(5) Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation (vgl. Aufgabe 5 ➡) (6) Erklären komplexer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen (vgl. Aufgabe 6 ➡)

4

Prüfungen mit digitalen Werkzeugen

Prüfungsaufgaben: Unterricht **mit**, Prüfung **ohne** MMS

- Standardaufgaben
(ohne Berücksichtigung von MMS)
- Nutzung von mit MMS
gewonnenen Erkenntnissen
- Bildschirmausgaben von
MMS interpretieren
- Beschreiben mehrerer
Vorgehensweisen zur
Lösung mit MMS



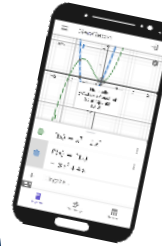
Prüfungsaufgaben: Unterricht und Prüfung **mit** MMS

- wie links
 - evtl. komplexer
 - MMS ist Kontrollinstanz
- Schwerpunkt:
Analysieren & Argumentieren
- Problemorientierung
- Realitätsnähe



Gründe für den Einsatz aus Lehrplansicht

- neue Formen der Leistungsmessung (KMK, LP Ma Sek II RLP, ...)
- Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung (Bildungsstandards Ma Sek II)
- Einsatz von Hilfsmitteln und elektronischen Medien sollen sich in der Praxis der Leistungsfeststellung und -bewertung wiederfinden (KMK, LP Ma Sek I RLP)



Gründe für den Einsatz aus SuS-Sicht

- SuS nutzen GeoGebra eigenständig (in Hausaufgaben, Übungen, zur Vorbereitung...) genau dann, wenn sie es auch in Tests, Klassen- und Kursarbeiten nutzen können
- Vergleich TR: Sicherheit bei Übungen „Dürfen wir den TR in der Arbeit benutzen?“
- Sind geübt, Aufgaben mit GeoGebra zu lösen, dürfen es nicht mehr, wenn es um Noten geht

Zu Beginn/Während der Unterrichtsreihe

- Entscheidungen zu Prüfungsrahmen frühzeitig festlegen und kommunizieren
 - BYOD oder Schulgeräte
 - CheatSheet (Befehlsliste) erlaubt
 - Zweigeteilte Prüfung?
- Einsatz im Unterricht wiederkehrend üben
 - benötigte Werkzeugkompetenz aufbauen
 - Funktionsumfang Prüfungsmodus
 - Bedienung der Prüfungsendgeräte
- Dokumentation
 - Fach- und Werkzeugsprache
 - Vorgehen beschreiben und begründen





In den Stunden vor der Prüfung

- Alarmfunktion erklären
- Vorgehen bei versehentlichem Alarm klären (Kriterium: Dauer der „Abwesenheit“)
- Szenario techn. Probleme (Ersatzgeräte, Vorgehen beschreiben)
- Betrugsversuche strikt ahnden: klar benennen Was? Wie?
- Ansage: keine gegenseitige Ausleihe (wg. Datei speichern)
- CheatSheet (Befehlsliste) durchgehen
- **Probelauf** mit Übungsaufgabe(n)
- Prüfung ggf. in Teile strukturieren – Ablauf üben
 - Hilfsmittelfreier Teil
 - MMS-Teil mit separatem Aufgabenblatt

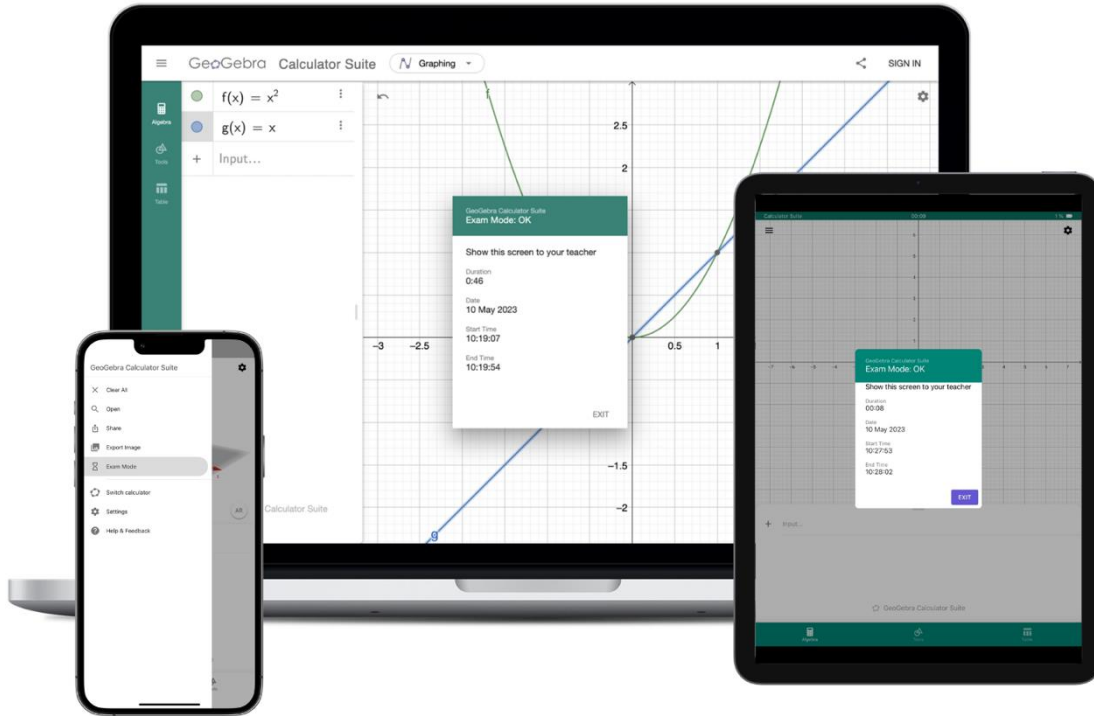
In der Prüfung

- Ablaufvarianten bei zwei Teilen (MMS/hilfsmittelfrei):
 - nur Aufgaben des jeweiligen Teils austeilen, nach Abgabe Bearbeitung
 - feste (max.) Bearbeitungszeit
 - falls MMS-Teil zuerst
 - Ende: Abgabe MMS-Geräte (Bearbeitung kann verbleiben)
 - Zeit, um Protokolle zu prüfen
 - falls hilfsmittelfreier Teil zuerst
 - Ausgabe MMS-Geräte erst danach
 - Protokolldatei per airdrop nach Einsammeln der Bearbeitung
- BYOD kein Gerät: Vorgehen beschreiben lassen
- stichprobenartige Kontrolle (Flugmodus-Zeichen, grüner Balken)
- Lehrkraft: eigenes Handy für Foto (MMS + AB mit Namen daneben)
- keine Angst vor Betrugsversuchen



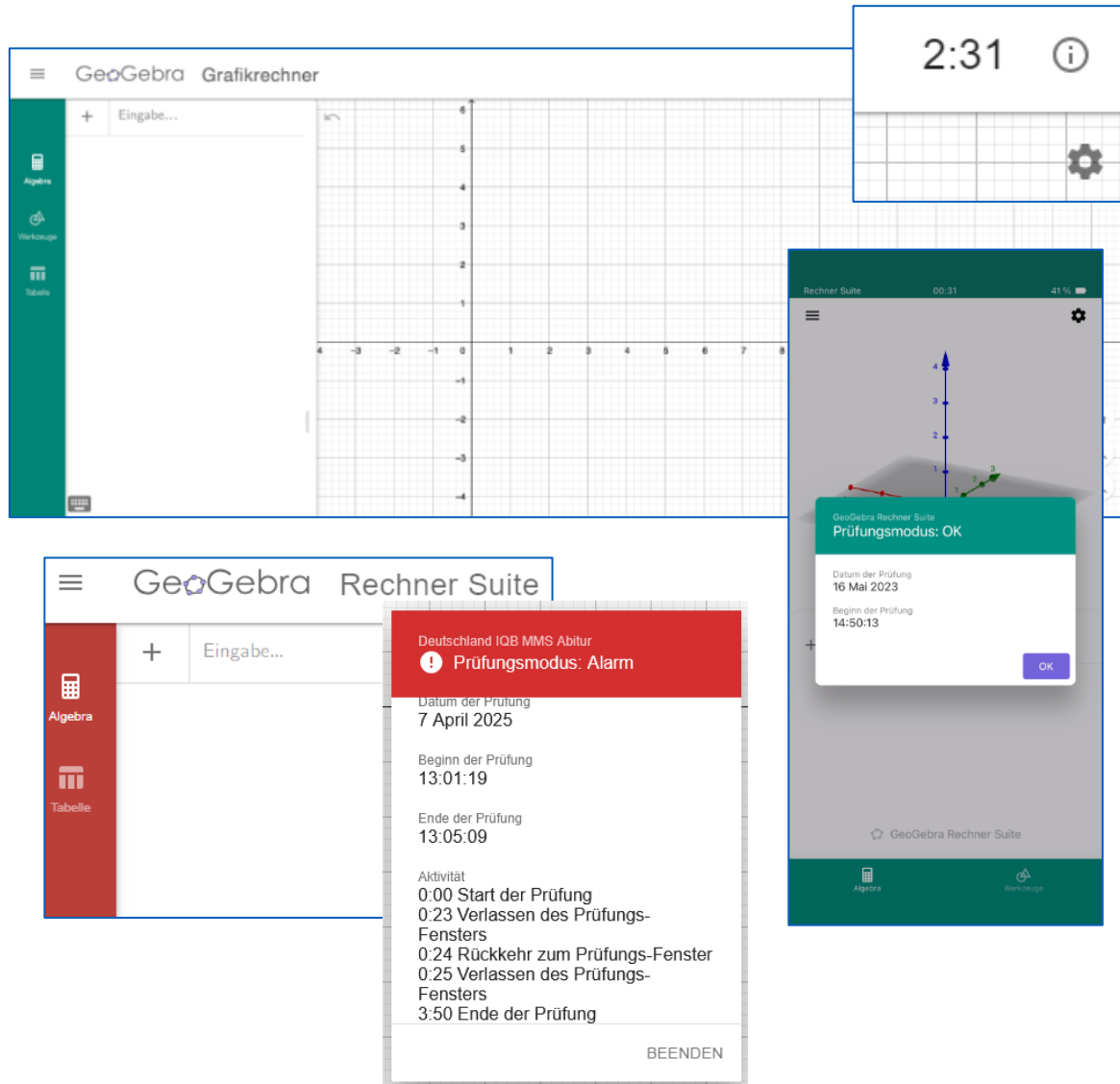
5

GeoGebra Prüfungsmodus

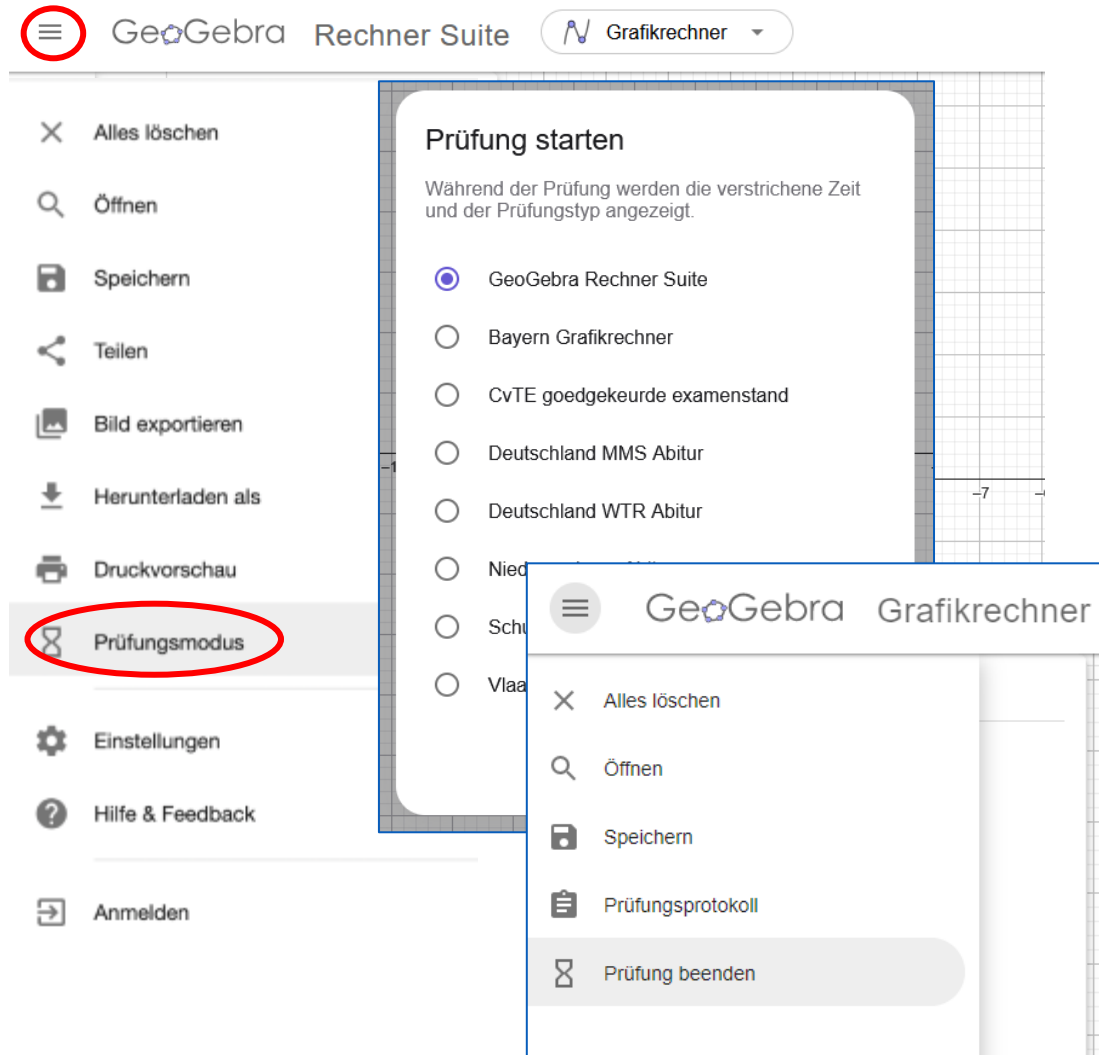


Unterstützung Prüfungsmodus	 Taschenrechner	 Grafikrechner	 Geometrie	 3D	 CAS	 Suite	 Classic
Tablets & Handys							
iOS	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Android	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Computer							
MacOS		✓	✓		✓	✓	✓
Windows 10		✓	✓		✓	✓	✓
Chromebook		✓					✓

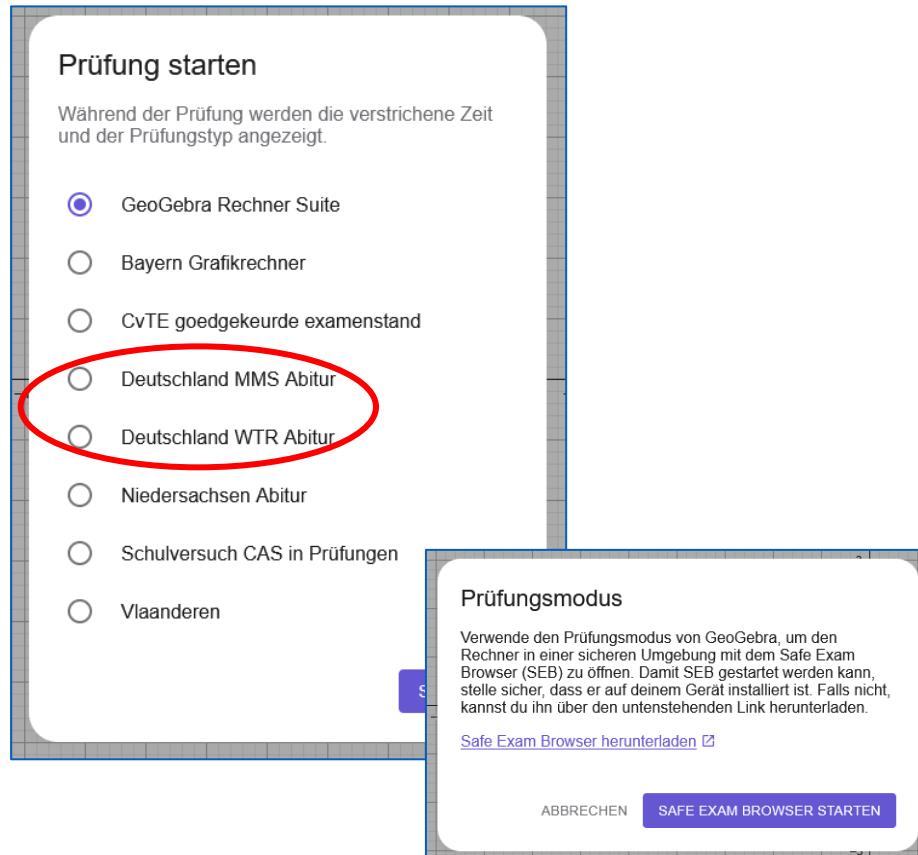
- sperrt mobile Geräte für andere Anwendungen
- Vollbildschirm-Fenster mit visuellem Alarm (dauerhaft) bei Verlassen der App
- automatisch generiertes Prüfungsprotokoll mit Beginn, Ende und Alarmzeiten
- Prüfungsmodus NICHT in der Webversion der Rechner Suite



- protokolliert Verlassen der App
- sichtbare Leiste links (bzw. Kopf-/Fußzeile)
grün alles ok, **rot** Alarm Fenster wurde verlassen
- Prüfungszeit rechts oben (bzw. mittig)
- Info: öffnet Protokoll mit Alarmzeiten (auch über Sandwichmenü, Prüfungsprotokoll)
- Protokoll erscheint bei Prüfung beenden automatisch und wird gespeichert (<Zeitstempel>.jpg bzw. ExamLog.png)

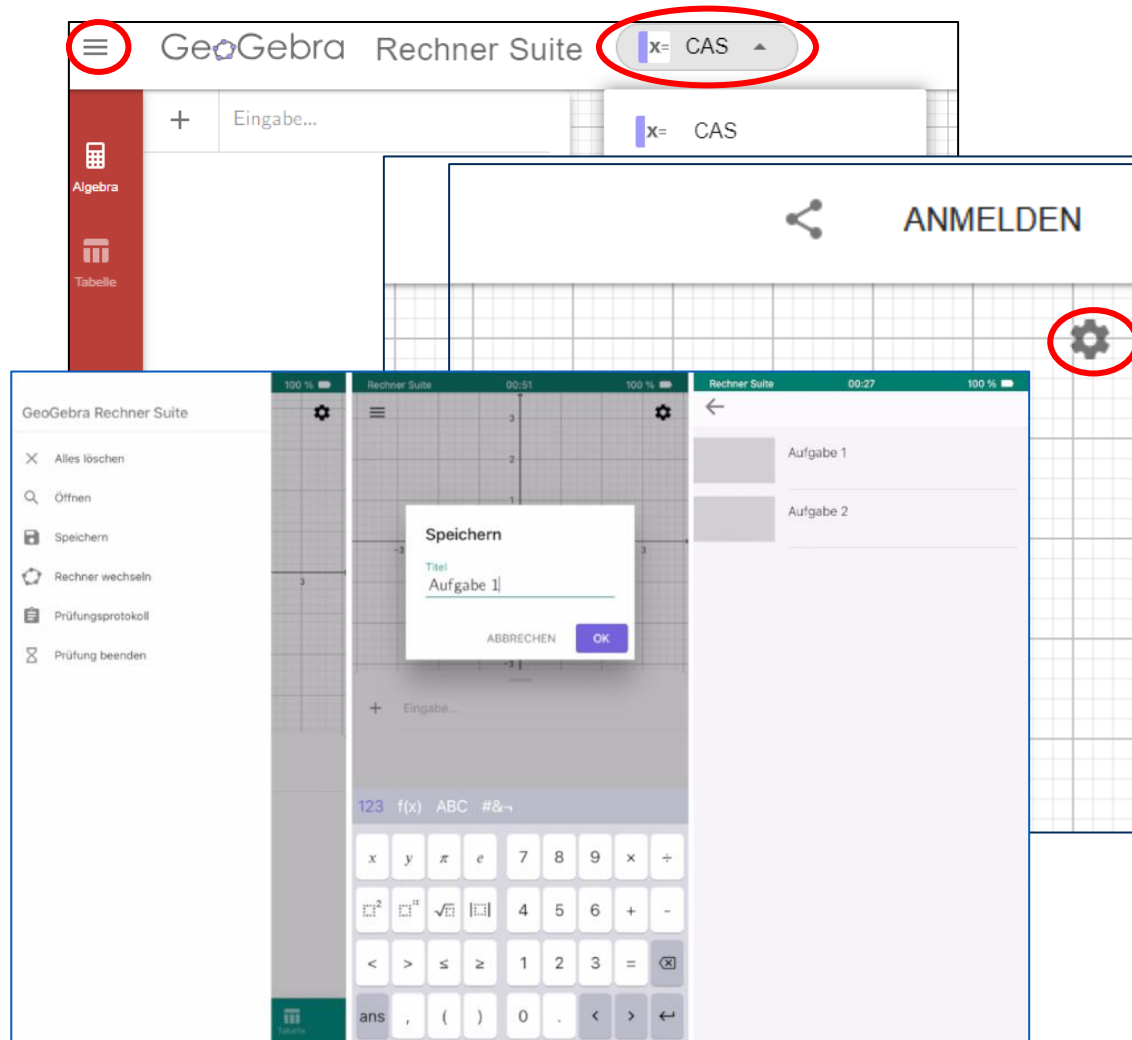


- Starten über Sandwichmenü
 - Prüfungsmodus
 - GeoGebra Rechner Suite (zukünftig Deutschland IQB MMS Abitur)
- Smartphone/Tablet: Aufforderung Flugmodus einschalten & Bluetooth deaktivieren
- Beenden über Sandwichmenü
 - Prüfung beenden
- zentral für alle SuS starten/beenden mit
 - MDM (Apple School Manager, Ms Intune, Jamf, ...)
 - Classroom (Apple/Google Classroom, ...)
 - Safer Exam Browser (SEB)
<https://www.geogebra.org/m/y3aufmy8#material/f7cegz3p>



IQB-zertifizierter Abitur-Modus

- zertifiziert seit Anfang des Jahres
Spezifikationen s. Workshop-Material
ABER: kein 3D Rechner, kein Geometrie
- Webversion für MaTeGnu: <https://roth.tel/mms> **nicht für Prüfungen**
(da keine Kontrolle über Browser hinaus) → nur Demo
- Prüfungsmodus: Sandwichmenü links oben
 - Prüfungsmodus auswählen
 - Deutschland IQB MMS Abitur



- Wechsel zwischen Rechnern:
Menü oben mittig
(oder Sandwichmenü: Rechner wechseln)
- Einstellungen:
im Zahnradmenü rechts oben
(oder Sandwichmenü: Einstellungen)
Sprache, Dezimalstellen, Achseneinteilung, ...
- Dateien speichern & öffnen möglich
Sandbox: Dateien existieren nur innerhalb Prüfung
 - GeoGebra-Applets lassen sich so nicht einbinden
→ Safe Exam Browser (digitaler Workshop)
Bsp.: <https://www.geogebra.org/m/h9jmuap6>



Zentral verwaltete iPads

- GeoGebra-Prüfungsmodus
 - Individuell wie beschrieben aus GeoGebra-App
 - Zentral über MDM / Apple School Manager
 - Als Safer Exam Browser Lösung
 - ABER: Bluetooth/WLAN muss deaktivierbar sein
- Geführter Modus des iPads
 - Beschränkt Zugriff auf eine App
<https://support.apple.com/de-de/guide/ipad/ipada16d1374/ipados>
 - GeoGebra als App nutzen

Hilfe-Center > Lerne GeoGebra

Lerne GeoGebra

Entdecke umfassende App Beschreibungen, vielfältige Materialsammlungen, Schritt-für-Schritt-Anleitungen und FAQs, um deine mathematischen Lern- und Lehrerfähigkeiten zu verbessern. Tauche ein und nutze das volle Potenzial von GeoGebra, egal ob du Anfänger*in oder fortgeschrittene*r Benutzer*in bist.

Erste Schritte mit GeoGebra

Die Vielfalt von GeoGebra: Ein Überblick
GeoGebra Account erstellen
Vergleich der GeoGebra Mathe Apps
Selbstlernkurs für Einsteiger*innen
GeoGebra in Prüfungen

GeoGebra Apps

Taschenrechner
Rechner Suite
Classic (für Autorinnen und Autoren)
Notizen

GeoGebra Materialien

Einleitung zu GeoGebra Materialien
Finde GeoGebra Materialien
Erstellen von GeoGebra Materialien
Verteile Materialien (an Schüler*innen)

GeoGebra Practice

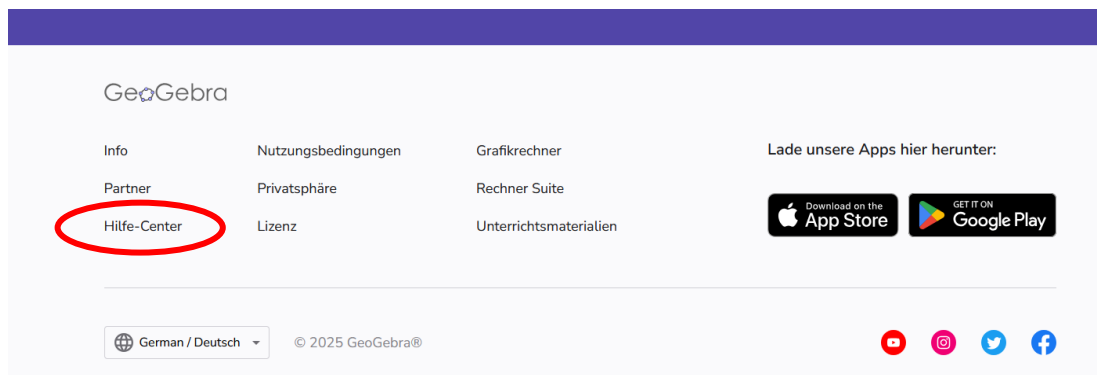
Einführung in GeoGebra Math Practice
Lehrer*in: GeoGebra Math Practice im Unterricht

Sek II Beispiele mit der Rechner Suite

Einleitung

FAQ

GeoGebra Apps
Account



Mehr zum GeoGebra-Prüfungsmodus

- Hilfe-Center (Startseite ganz unten)
 - Lerne GeoGebra
 - Erste Schritte mit GeoGebra
 - GeoGebra in Prüfungen
- Lerne GeoGebra-Tutorial
<https://www.geogebra.org/m/m97r7cd4>

Sie sind dran: Laden Sie auf ihrem Handy/Tablet die GeoGebra Rechner Suite herunter (App Store, Play Store) Aktivieren Sie ggf. den Flugmodus. Starten Sie den Prüfungsmodus. Wählen Sie die Variante GeoGebra Rechner Suite aus.



Bearbeiten Sie die nachfolgende Aufgabe und dokumentieren Sie Ihr Vorgehen!



Aufgabe

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$. Überprüfen Sie, ob die Funktion f Schnittpunkte mit ihrer Ableitungsfunktion hat und bestimmen Sie diese Punkte falls vorhanden.

6

Dokumentation von Lösungen

begegnet SuS in...

- Äußerungen/Dokumenten der Lehrkraft (Tafelbild)
- Schulbüchern, Lernumgebungen, ...
- Aufgabenstellungen und -bearbeitungen

Ich drücke menu-4-1-4

$$f'(x) := \frac{d}{dx} (f(x))$$

CAS $f(x) := x^2 - 6x + 9$
 $\rightarrow \text{solve}(f(x)=0, x)$
 $x=3$

nach x gelöst!

- 1) menu $\rightarrow$ Lists & Spreadsheet hinzufügen
- 2) Bei A Jahr, bei B Anzahl eingeben
- 3) Werte aus Tabelle übertragen

$f(x) = 3,7 \cdot x^2$
 Idee: Löse $1480 = 3,7 \cdot x^2$
 nach x auf.
 CAS: $\text{solve}(f(x)=1480, x)$
 liefert folgende Ergebnisse:
 $x = 20, x = -20$
 Nach 20s ist die Höhe erreicht.
 1.) $x = 60, \text{solve}(f(x)=1370, x)$

8 Ein quadratisches Modell finden

a) Zeichne zu der Tabelle ein Streudiagramm. Überzeuge dich davon, dass die Punkte in etwa auf einer Parabel liegen.
 b) Berechne ein quadratisches Modell: Wähle dazu drei beliebige Punkte des Streudiagramms. Berechne mit diesen drei Punkten die Gleichung der Parabel, die durch diese Punkte geht.
 c) Mit dem GTR kann man eine Parabel besonders gut an die Punkte des Streudiagramms anpassen. Vergleiche mit Teil b).

Gib die Tabelle ein.

x	y
-3	30
-2	10
0	-10
1,5	20
2	34
3	65

Zeichne das Streudiagramm und die errechnete Modellparabel.

Berechne ein quadratisches Modell. Wähle dazu die quadratische Regression.

EDIT TESTS
 1:1-Var Stats
 2:2-Var Stats
 3:Med-Med
 4:LinReg(ax+b)
 5:QuadReg
 6:CubicReg
 7:QuartReg

QuadReg
 $y = ax^2 + bx + c$
 $a = 6.00539185$
 $b = 6.023134796$
 $c = -4.947836991$

Diskutieren Sie nun zu zweit die beiden Dokumentationen von SuS.

Was daran halten Sie für angemessen, was eher nicht?

Aufgabe Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$. Zeigen Sie, ob die Funktion f Schnittpunkte mit ihrer Ableitungsfunktion hat und bestimmen Sie diese Punkte falls vorhanden.

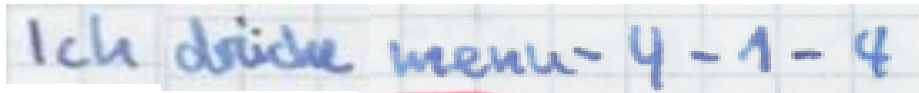
$f'(x) := \frac{d}{dx} (f(x))$ solve($f'(x) = f(x), x$) $\leadsto$ x-Werte
Ergebnisse in $f(x)$ oder $f'(x)$ einsetzen (müsste das selbe rauskommen)
 $\leadsto$ y-Werte

1. Abl. fkt. bilden: $f'(x) = 6 \cdot x + 5$
2. in Graphs darstellen
3. SP & v. $f(x)$ & $f'(x) \Rightarrow$ gel. setzen (mit solve)
4. SP: $x_1 = -0,43$ $x_2 = 0,76$ $\rightarrow$ für y-Werte $\rightarrow f(x_1); f(x_2)$
bzw. $SP_1 = (-0,43 | 2,4)$ $SP_2 (0,76 | 9,53)$



Kriterien für Dokumentation im Unterricht

- nicht nur den Bildschirm abschreiben
- Lösung muss für andere verständlich sein
- Lösung beschreibt mathematische Vorgehensweise, nicht nur die Bedienung des Werkzeugs



Ich drücke menu-4-1-4

manchmal angemessen, aber eben nicht immer!

Potential: Protokoll

- Erinnerungstütze (Beginn einer Unterrichtsreihe)
- genaue Beschreibung des Vorgehens (für Mitschüler)
- Bedienung wird genau dokumentiert

Grenzen: Prüfung

- nicht nachvollziehbar z. B. für Fremdkorrektor:innen
- keine mathematischen Argumente – Dokumentation Bedienebene

Aber:
Unterschiedliche Funktion der Dokumentation je nach Unterrichtssituation muss berücksichtigt werden.

Allgemein: kurz sachlich präzise vollständig

Absolut notwendig

1. Kommentierter Lösungsansatz

- a) mit Worten erklären, was gesucht ist / was zu zeigen ist
- b) mathematisch korrekt formulieren, was zu zeigen ist (in die Sprache der Mathematik übersetzen)

2. GeoGebra - Rechner

nennen, welcher GeoGebra-Rechner zur Lösung eingesetzt wird: CAS / Grafikrechner / 3D-Rechner...

3. GeoGebra - Befehle

- a) notieren, welche Befehle benutzt werden und was genau in GeoGebra eingegeben wird
- b) aufschreiben, welches Ergebnis GeoGebra mit dem Befehl liefert

4. Ergebnis interpretieren

Das GeoGebra-Ergebnis muss (im Sachzusammenhang) interpretiert werden.

Wenn in einer Aufgabe zweimal dasselbe Vorgehen angewendet wird, muss dieses nur einmal ausführlich dokumentiert werden.

Operatoren bei der Dokumentation

Lösungsweg frei wählbar:

Folgende allgemeine Operatoren ohne weitere Spezifikation lassen den Lösungsweg offen, d.h. ihr könnt das Problem so lösen, wie es am schnellsten/einfachsten für euch ist. Graphisch (numerisch), mit CAS, argumentativ, ohne Hilfsmittel ... alles möglich, wenn folgende Operatoren auftreten:

- Zeigen Sie...
- Weisen Sie nach...
- Bestimmen Sie...
- Ermitteln Sie...
- Untersuchen Sie...
- Begründen Sie...

Ohne Rechner:

Ohne einen Rechner muss eine Aufgabe gelöst werden, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

Berechnen Sie ohne CAS....

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel...

CAS-Rechner:

Der CAS-Rechner muss eingesetzt, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

- Berechnen Sie...
- Bestimmen Sie rechnerisch...
- Zeigen Sie rechnerisch...
- Untersuchen Sie rechnerisch...
- Ermitteln Sie rechnerisch...

Grafikrechner:

Der Grafikrechner muss eingesetzt werden, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

- Bestimmen Sie graphisch/numerisch...
- Zeigen Sie graphisch/numerisch ...
- Untersuchen Sie graphisch/numerisch ...
- Ermitteln Sie graphisch/numerisch ...

Erstellen Sie ein schulinternes Konzept/ einen Orientierungsrahmen für die Dokumentation

- Welche Aspekte sollte ein solches Konzept umfassen (etwa: Leitlinien, Musterlösungen, zentrale Kompetenzen/Befehle, ...)?
- Worauf sollte sich die Fachgruppe verbindlich einigen, was sollte individuell durch die KuK entschieden werden?
- Formulieren Sie vor dem Hintergrund der Beispiele Leitlinien für ein schulinternes Konzept zur Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache.
- Erstellen Sie illustrative Beispiele für Dokumentationen, die Ihre Kriterien verdeutlichen (Good & bad practice)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Alexander Lutz (Referent & Überarbeitung)
Dr. Susanne Digel (Grundlage Foliensatz)

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

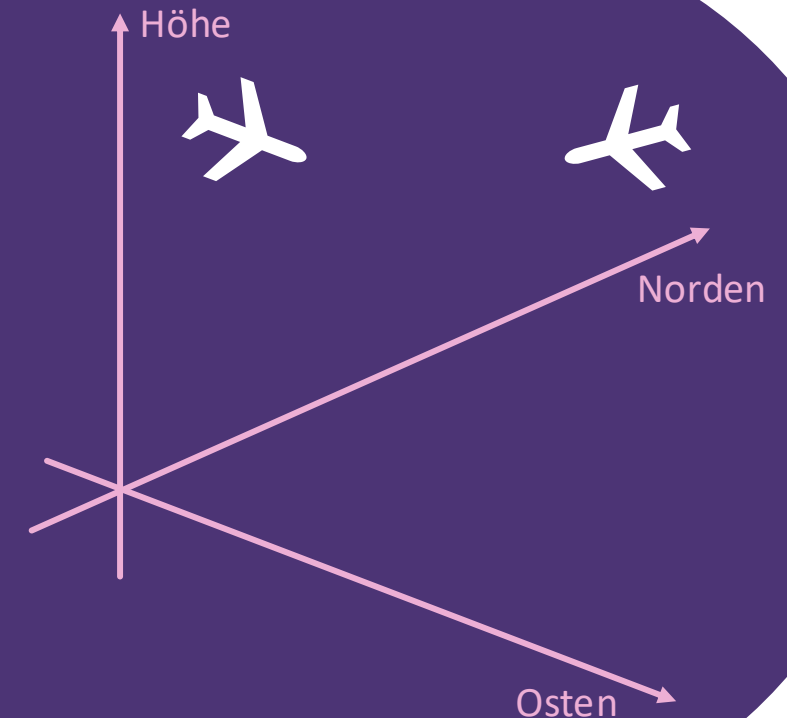
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

mategnu.de



Aufgabe 1 – Flugsicherung

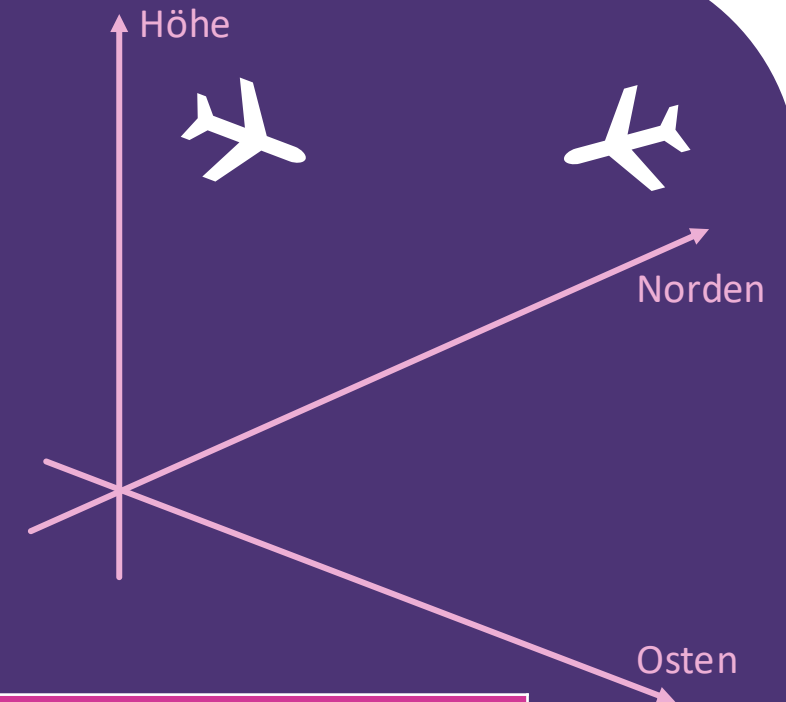
„Glück gehabt?!“, denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen. Gegen 11:00 Uhr morgens im Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der zwei Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, dann wäre eine Kollision wohl nicht zu verhindern gewesen.



Aufgabe 1 – Flugsicherung: Neben den Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Flugs über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeugs zur Antenne, die Höhe des Flugzeugs und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten – Norden, Osten, Höhe – (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.

Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils drei Orte für die beiden Flugzeuge:

Flugzeug \ Zeit	11 : 10 : 10	11 : 10 : 15	11 : 10 : 20
Boing 767-299	(80, 112, 10380)	(1102, 978, 10366)	(2132, 1843, 10370)
Douglas DC 10-30F	(-78, 2302, 10045)	(988, 1103, 10062)	(2054, -96, 10079)

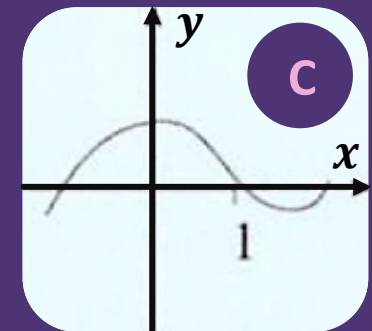
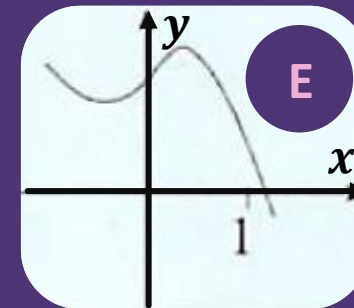
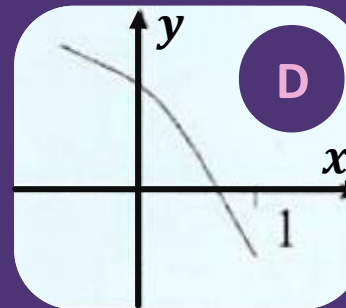
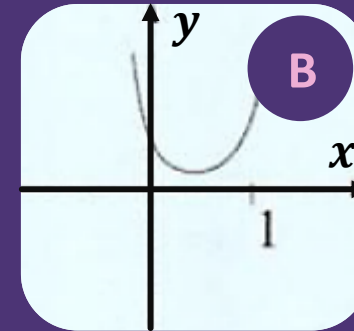
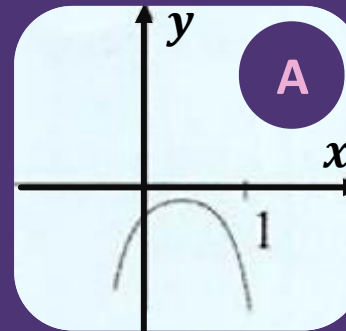


Aufgabe 2 – Graphen analysieren

Lernende sollten einen Funktionsgraph skizzieren, der alle folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $f'(0) < 0$,
- $f'(1) < 0$ und
- $f''(x)$ ist immer negativ

Analysieren Sie die nebenstehenden fünf von Lernenden skizzierten Funktionsgraphen **A**, **B**, **C**, **D** und **E**. Geben Sie an, welche(r) der Graphen die geforderten Eigenschaften aufweist und **begründen Sie Ihre Antwort**.

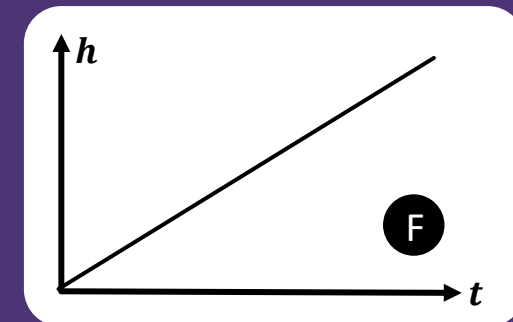
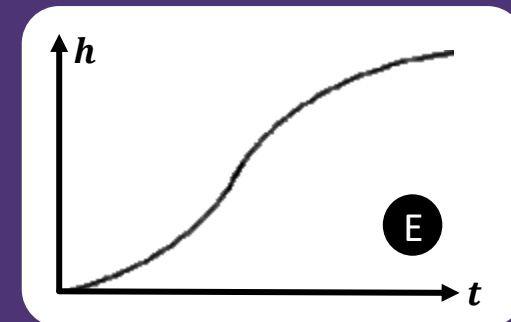
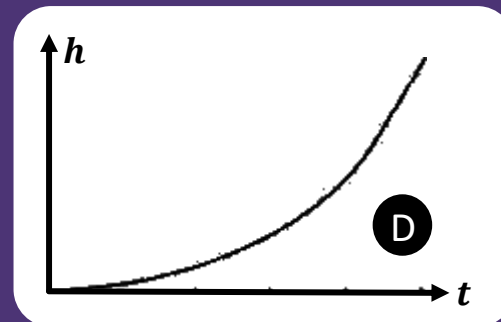
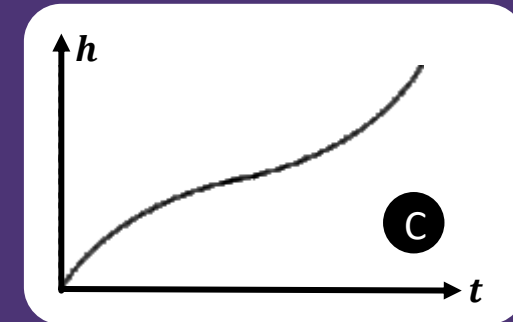
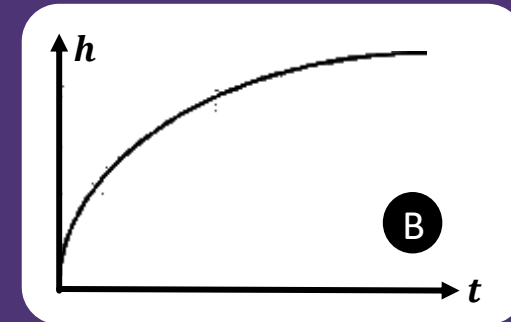
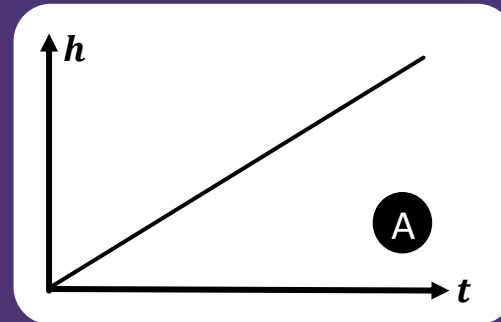
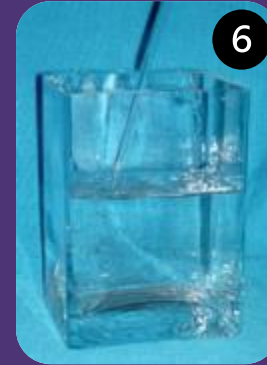
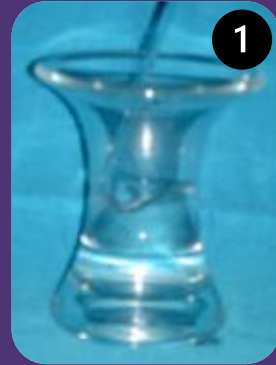


Aufgabe 3 – Gefäße füllen

Verschiedene Gefäße mit den Nummern 1 bis 6 werden gleichmäßig (mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit) mit Wasser gefüllt.

Die Funktionsgraphen A bis F stellen jeweils den funktionalen Zusammenhang zwischen der Füllhöhe h eines Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

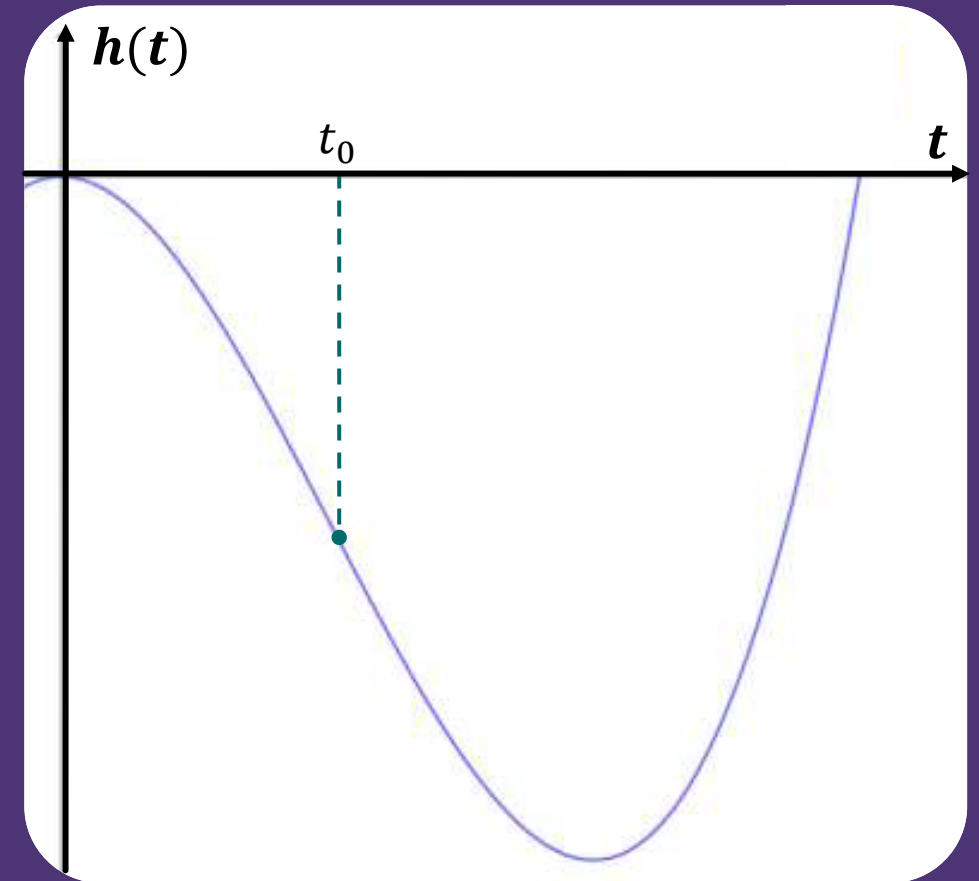
Ordnen Sie den Gefäßen jeweils einen passenden Funktionsgraph zu und begründen Sie Ihre Auswahl.



Aufgabe 4.1 – Tauchvorgang

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch eine Funktion $h(t)$ beschrieben, deren Graph rechts dargestellt ist. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t ist die Zeit in Stunden.

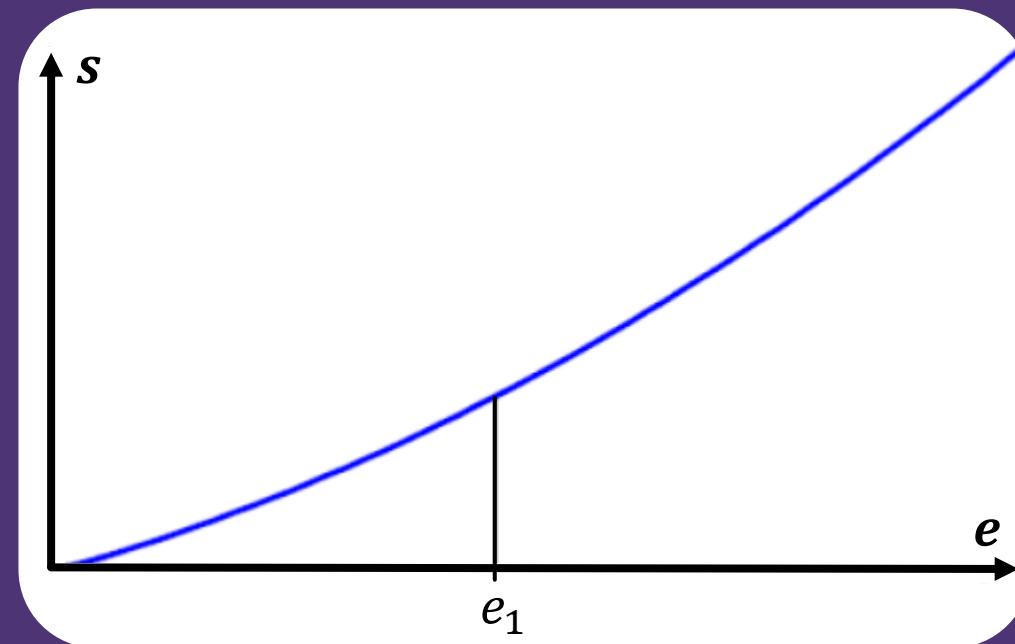
- a) Beschreiben Sie die Situation zum eingezeichneten Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.
 - b) Erklären Sie mathematisch mithilfe des Graphen, dass das U-Boot zum eingezeichneten Zeitpunkt t am schnellsten sinkt.
- Finden Sie aus Sicht jeder der vier Grundvorstellungen eine Erklärung!



Aufgabe 4.2 – Einkommenssteuer

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet. e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).

- a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\frac{s(e_1)}{e_1}$.
- b) $s'(e_1)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.
- c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro. Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{s(e_1+h) - s(e_1)}{h}$.
- d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\frac{s(e_1+h) - s(e_1)}{h} \geq \frac{s(e_1)}{e_1}$.
- e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.



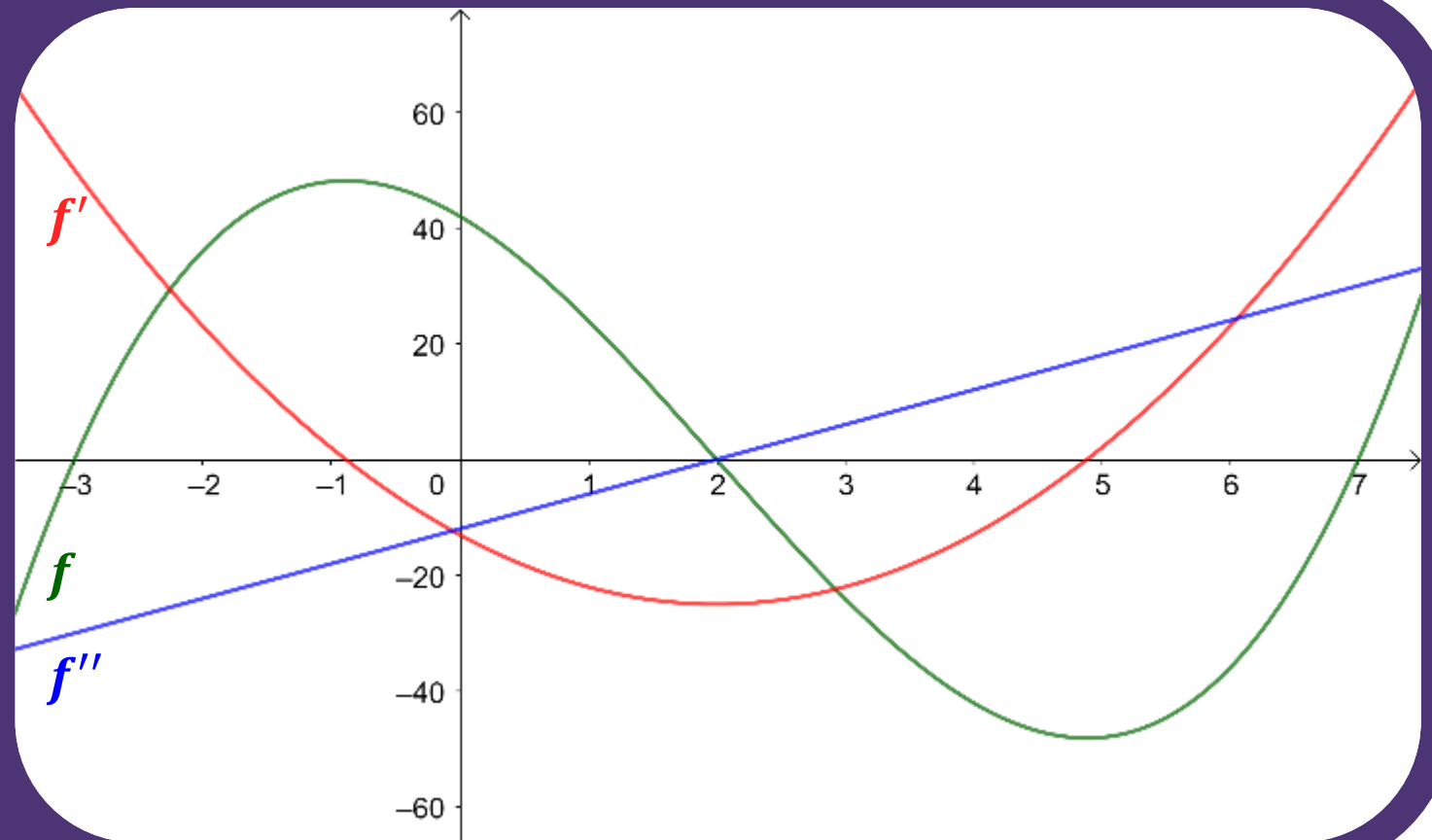
Aufgabe 5

Rechenverfahren erklären

Um eine Maximalstelle zu bestimmen, sind zwei Schritte notwendig:

- (1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und
- (2) überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.



Aufgabe 6 – Grippewelle

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

- a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' .
- b) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$ im Sachzusammenhang.
- c) Erklären Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.

