

MaTeGnu

GeoGebra-Institut
Landau (RLP)

GeoGebra-Werkzeugeinsatz in Übungen und Prüfungen

Dr. Susanne Digel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

21.09.2026 GeoGebra-Tag RLP 2026

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Prüfungen mit digitalen Werkzeugen …

Digitale Werkzeuge** (wie etwa GeoGebra) **in Tests, Klassen- und Kursarbeiten:

Ihre Gedanken dazu

Tauschen Sie sich zu zweit aus über Ihre
***Hoffnungen**, **Befürchtungen** und **Überlegungen**.*

www.menti.com
und Code **2167 3961** eingeben



oder https://www.menti.com/alxw5z3n38y7



Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

GeoGebra-Institut Landau (RLP)

Übersicht

1. Digitale Werkzeuge in Aufgaben
2. GeoGebra in Prüfungen
3. GeoGebra Prüfungsmodus
4. Werkzeugkompetenzen
5. Dokumentation von Lösungen

https://geogebra-rlp.de

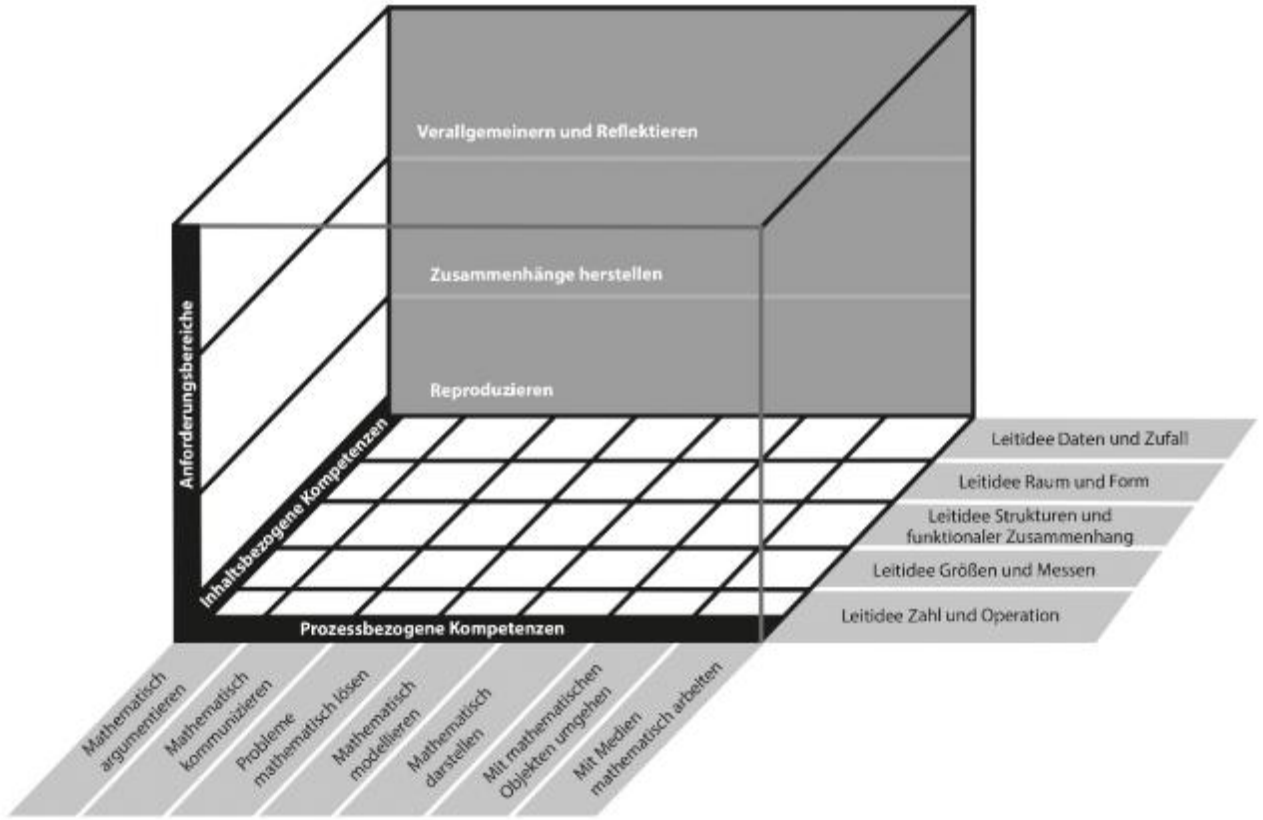
RPTU

1 Digitale Werkzeuge in Aufgaben

Bildungsstandards Sek I 2022

Neuer Kompetenzbereich „Mit Medien mathematisch arbeiten“

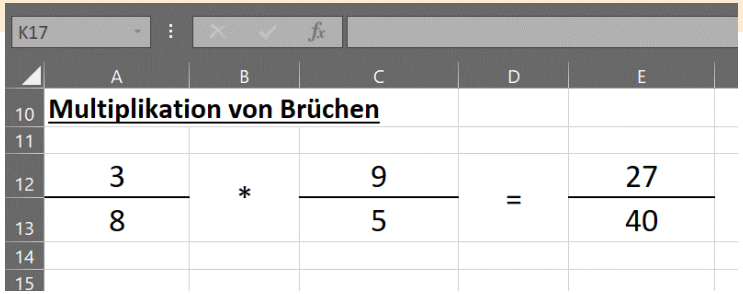
- **Fachliche Kompetenzen digital fördern –** Lernen MIT Medien
- **Digitale Kompetenzen fachlich fördern –** Lernen ÜBER Medien



Kennenlernen und Vertiefen der Arbeit mit Tabellenkalkulation

Vertiefen der Bruchrechnung durch Reflektieren und Strukturieren der nötigen Rechenschritte (Algorithmus)

Du siehst hier eine „Bruchmultiplikations-Maschine“. Erstelle selbst eine „Bruchdivisions-Maschine“.



siehe QuaMath Basis-Baustein 6; KMK (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) (i.d.F. vom 23.06.2022). Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) (n. d.). Lernaufgaben Mathematik Sek I. Berlin: IQB

Digitale Werkzeuge
modulare Mathematiksysteme (MMS)

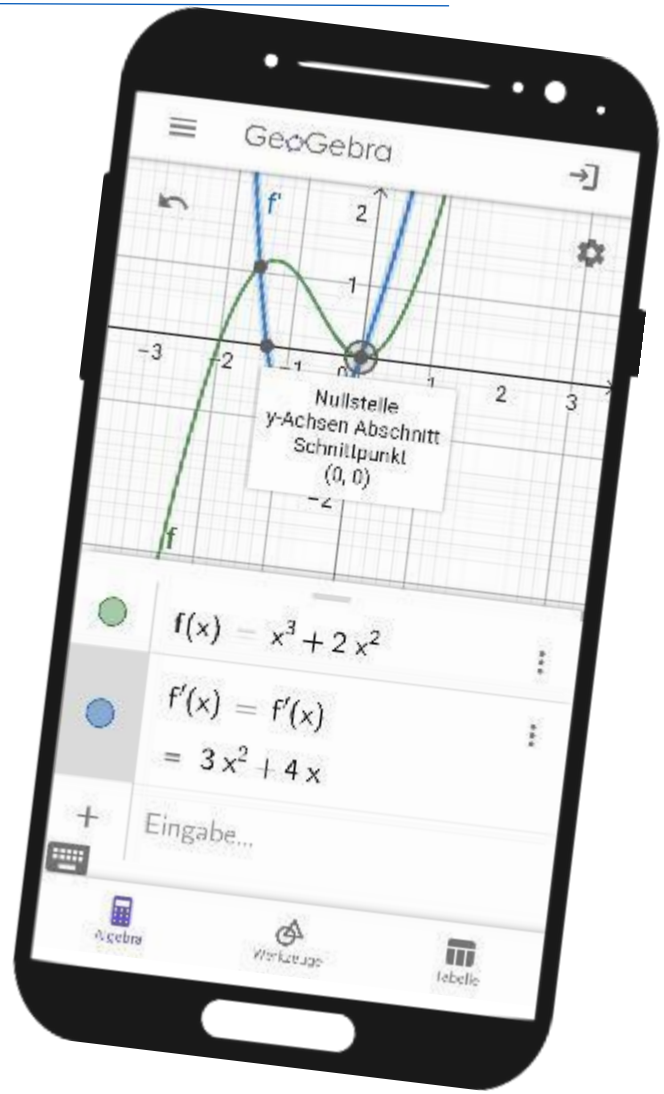
Digitale Werkzeuge

sind für den Mathematik-unterricht im Wesentlichen

- Tabellenkalkulationsprogramme,
- Computer-Algebra-Systeme,
- dynamische Geometrie-Systeme

und als deren Integration mit Vorgaben der KMK für das zentrale Abitur

- modulare Mathematiksysteme (MMS).



Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**.

Digitale Mathematiksysteme (z.B. GeoGebra)

Digitale Lernumgebung



Konfiguration vollständig vorgegeben

Strukturierungs- und Fokussierungshilfen für alle wesentlichen Aspekte (z. B. Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, ...)

Elemente können ein- und ausgeblendet werden

Variationsmöglichkeiten bewusst eingeschränkt.

Hybrid



Veränderbare (Teil-)Konfiguration vorgegeben

Kann / muss ergänzt oder verändert werden

Nur einzelne Strukturierungs- und Fokussierungshilfen vorhanden

Digitales Werkzeug



Leere, unstrukturierte MMS-Datei

MMS wird selbst-ständig und ohne Vorgaben benutzt

Erfordert Werkzeugkompetenz

Roth, J. (2019). **Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht: Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate**. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht – Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis (S. 233-248). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2022). **Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis.** In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Berlin: Springer Spektrum.

Digitale Werkzeuge in Aufgaben

Aufgabe

Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x+2)^2 - 1 = 0$ b) $(x+2)^2 + 2 = 0$ c) $(x+2)^2 = 0$

Sie sind dran!

Lösen Sie die Aufgabe mit GeoGebra.

Notieren Sie welche Kompetenzen diese Aufgabe erfordert und welche „von GeoGebra abgenommen“ werden.



kognitive Aktivitäten

Oberflächlich

Tiefgehend

1	**Erinnern, Reproduzieren & Ausführen**	
	Konzeptuell	**Prozedural**
	▪ Fakten abrufen, angeben, beschreiben ▪ Wiedergeben, nennen, benennen ▪ Aufzählen, Beispiele angeben	▪ Rechnen und Formeln nutzen ▪ Algorithmus/Verfahren ausführen ▪ Bestimmen, Ermitteln
2	**Verstehen, Anwenden & Begründen**	
	Konzeptuell	**Prozedural**
	▪ Erklären von Bedeutungen ▪ Begründen mathematischer Sachverhalte ▪ Vernetzen von Inhalten und Darstellungen ▪ Beispiele und Gegenbeispiele finden ▪ Formalisieren/Schematisieren ▪ Mathematisieren (mit Modell finden),	▪ Erläutern von Rechenwegen ▪ Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen/schätzen, Lösungsweg bewusst wählen ▪ Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell) ▪ Strategien nutzen ▪ Entscheiden ohne Begr., rechnerisch begründen & nachweisen, zeigen
3	**Analysieren, Bewerten & Beweisen**	
	▪ Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten ▪ Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren ▪ Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren, Vergleichen ▪ Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben ▪ Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren, (Formal) Beweisen ▪ Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren	
4	**Kreativ neu denken**	
	▪ Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen ▪ Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/Modelle/tragfähige Begriffe erfinden ▪ Neue Perspektiven einnehmen, Planen/Bearbeitungsprozesse strukturieren, Recherchieren ▪ Metakognitiv und kritisch reflektieren	

Barzel, B. & Ebers, P. (2020). Kognitiv aktivieren. In Mathematik lehren. (223), auf Grundlage von Anderson & Krathwohl 2001

kognitive Aktivitäten - Beispiel

Aufgabe (mit GeoGebra)

Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $(x+2)^2 - 1 = 0$ b) $(x+2)^2 + 2 = 0$ c) $(x+2)^2 = 0$

Erkläre den Zusammenhang der Gleichung zum erzeugten Graphen und identifiziere die Lösungen im Graph.

Gib weitere Gleichungen mit keiner, einer oder zwei Lösungen an.

Untersuche, ob es mehr als zwei Lösungen geben kann und begründe deine Antwort.

Bestimme allgemein, für welche Werte p und q die Gleichung $(x+p)^2 - q = 0$ keine, eine oder zwei Lösungen hat.

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus/Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

2 Verstehen, Anwenden & Begründen

Konzeptuell	Prozedural
▪ Erklären von Bedeutung ▪ Vernetzen von Darstellungen	▪ Begründen

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

„Produktiv ergänzen“

- Muster fortsetzen
- Strukturieren

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Reflektieren

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Generalisieren

Muir, 2014; Klinger, 2019; Barzel, Ball & Klinger, 2019; Klinger & Schüler-Meyer, 2019

Aufgaben variieren

Aufgabentyp	Gegeben	Weg	Gesucht
Grundaufgabe / einf. Bestimmungsaufgabe (Bestimme)	✓	✓	–
Vollständig (falsch) gelöste Aufgabe (Überprüfe… korrigiere)	✓	✓	✓
Einfache Umkehraufgabe (Formuliere eine passende Aufgabenstellung)	–	✓	✓
Schwierigere Umkehraufgabe (Formuliere eine passende Aufgabenstellung mit Bedingung … und notiere den Lösungsweg)	–	–	✓
Strategiefindungs- / Begründungsaufgabe (Notiere und erläutere eine Lösung)	✓	–	✓
Schwierigere Bestimmungsaufgabe (Gib zwei unterschiedliche Lösungswege an und löse die Aufgabe)	✓	–	–
Eigene Aufgabenkonstruktion / eigene Anwendung finden (Formuliere eine Aufg. zur partiellen Integration/zum orientierten Flächeninhalt und löse sie)	–	✓	–
Offene Problemsituation (Gib eine Aufgabe zum Sachkontext an und löse sie mithilfe der Ableitung)	–	–	–

Eilers, K.; Bergmann, L. (2010). Erstes Üben auf eigenem Niveau – Mit Aufgabensets die Selbsteinschätzung fördern. *ml 162*, 14-17

Aufgaben für Verständnis öffnen

Was wird gefordert?	Beispiele für Aufgabentypen
Verständnis zur Mathematisierung nutzen	**(1)** Eine gegebene Sachsituation mathematisieren (vgl. Aufgabe 1 ↗) **(2)** Analysieren einer falschen Mathematisierung (vgl. Aufgabe 2 ↗)
Verständnis zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen	**(3)** Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild (vgl. Aufgabe 3 ↗) **(4)** Interpretieren eines mathematischen Ausdrucks im Sachkontext (vgl. Aufgabe 4.1 ↗: Sachkontext → mathematischer Ausdruck und Aufgabe 4.2 ↗: mathematischer Ausdruck → Sachkontext)
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliches Verständnis erklären	**(5)** Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation (vgl. Aufgabe 5 ↗) **(6)** Erklären komplexer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen (vgl. Aufgabe 6 ↗)

Hußmann, S. & Prediger, S. (2003). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten & zentr. Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

2

GeoGebra in Prüfungen

Aufgaben ~~von~~ Prüfungen im MU

Prüfungen sollten …

- Ziele von Bildungsstandards und Lehrplänen widerspiegeln
- im Einklang mit den Lehr- & Lern-praktiken des Unterrichts stehen
- Lernenden die Möglichkeit geben ihr Wissen und ihre Fähigkeiten geeignet darzustellen

Prüfungen verdeutlichen …

welche Kenntnisse und Fähigkeiten für wichtig erachtet & honoriert werden

(Art der Aufgaben, geprüfte Fähigkeiten, Anzahl der Bewertungseinheiten, erlaubte Hilfsmittel)

> **Assessment**
> should not merely be done to students; rather, it should also be done for students, to guide and enhance their learning.
>
> NCTM: Principles und Standards for School Mathematics

Constructive Alignment

> In **Prüfungen** muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den **Unterricht** qualitativ und quantitativ prägt.
>
> Henning Körner

Herausforderungen bei Prüfungen

Unterschiedliche Sichtweisen auf Lernziele

Lehrkraft formuliert Kompetenzentwicklung in Lernzielen für den Unterricht.
In Prüfung wird nur (prozedurales) Wissen abgefragt.
Für Lernende ist Auswendiglernen der Schlagworte und Verfahren sinnvoller Fokus.

Lernziele

Backwash-Effekte
rein prüfungsorientiertes Lernen

Lehren und Lernen ⇄ **Prüfung**

Teaching-to-the-Test
Unterricht als Vorgehens-lehren (Prüfungstraining)

Lehren und **Lernen**, **Lernziele** und **Prüfung** sind nicht im Gleichgewicht, nicht konstruktiv aneinander ausgerichtet
→ keine nachhaltige Kompetenzentwicklung; keine angemessenen Gelegenheiten zum Diagnostizieren und Fördern

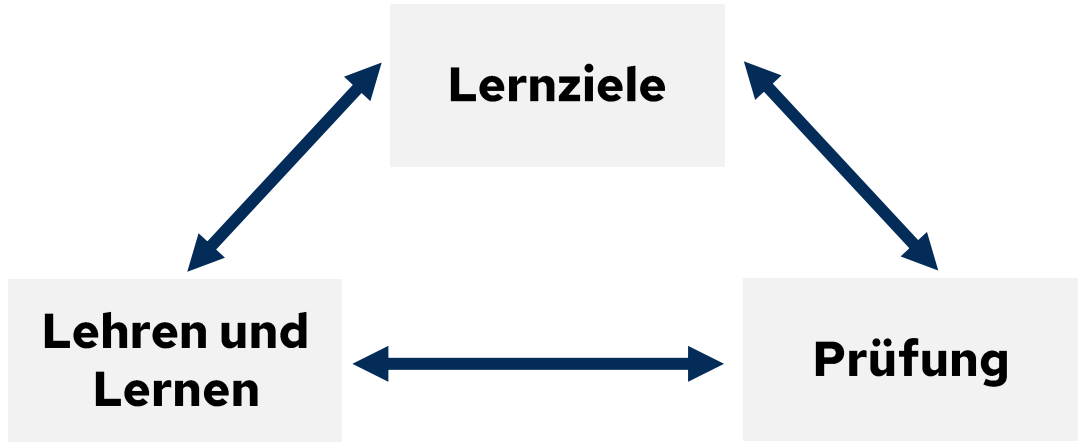
Siehe QuaMath Basis-Baustein 5; Barzel, B. & Leuders, T. (2021). „Learning to the test?“ – wissen, was man lernt. Mathematik lehren, 225, 2–7.

Constructive Alignment

Abstimmung von Lehr- und Lernmethoden sowie Prüfungsformen mit den angestrebten Lernzielen.
Ziel: Zieltransparent und Passung

Zielkompetenzen definieren und kommunizieren

Checklisten
Kompetenzraster



Konkrete Aktivität für Kompetenzerwerb der Lernenden

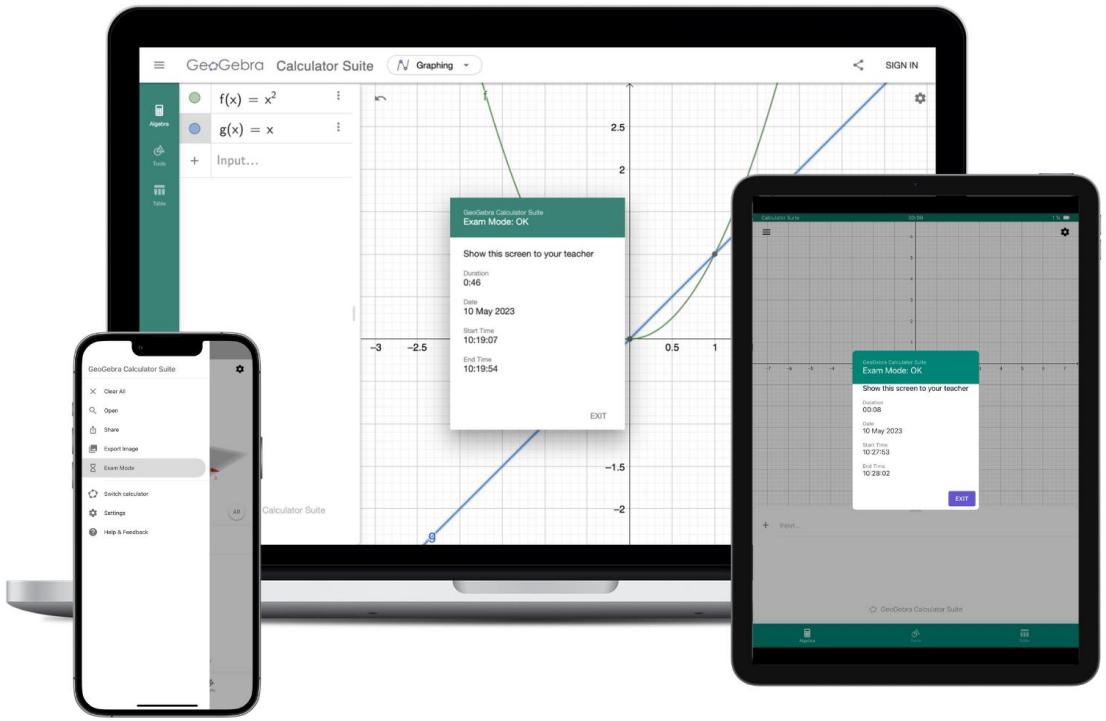
Aufgaben prüfen Lernziele und machen Kompetenzen sichtbar

Barzel, B. & Leuders, T. (2021). „Learning to the test?“ – wissen, was man lernt. Mathematik lehren, 225, 2–7.

3

GeoGebra Prüfungsmodus

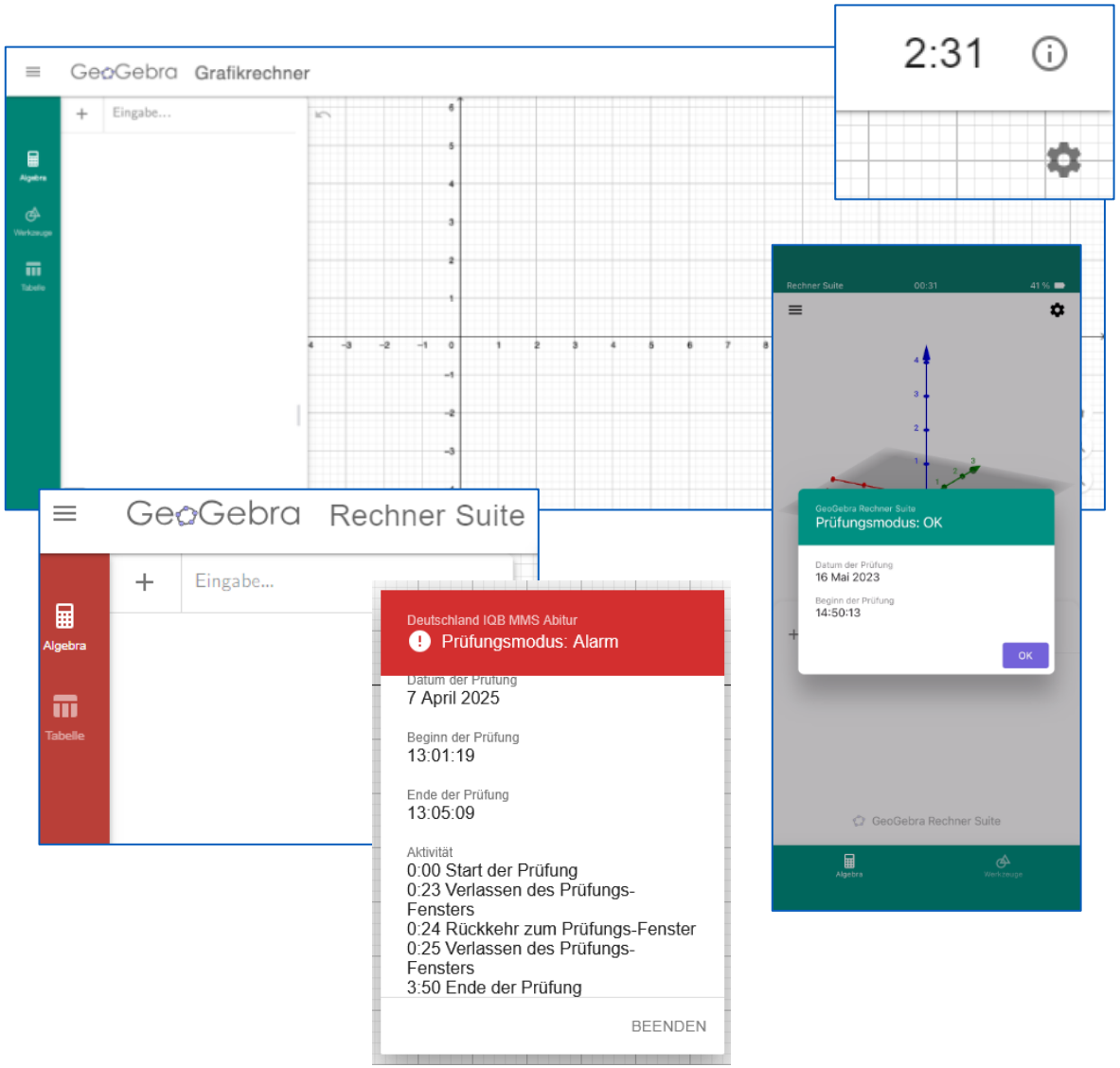
GeoGebra Prüfungsmodus



Unterstützung Prüfungsmodus	Taschenrechner	Grafikrechner	Geometrie	3D	CAS	Suite	Classic
Tablets & Handys							
iOS	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Android	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Computer							
MacOS		✓	✓		✓	✓	✓
Windows 10		✓	✓		✓	✓	✓
Chromebook		✓					✓

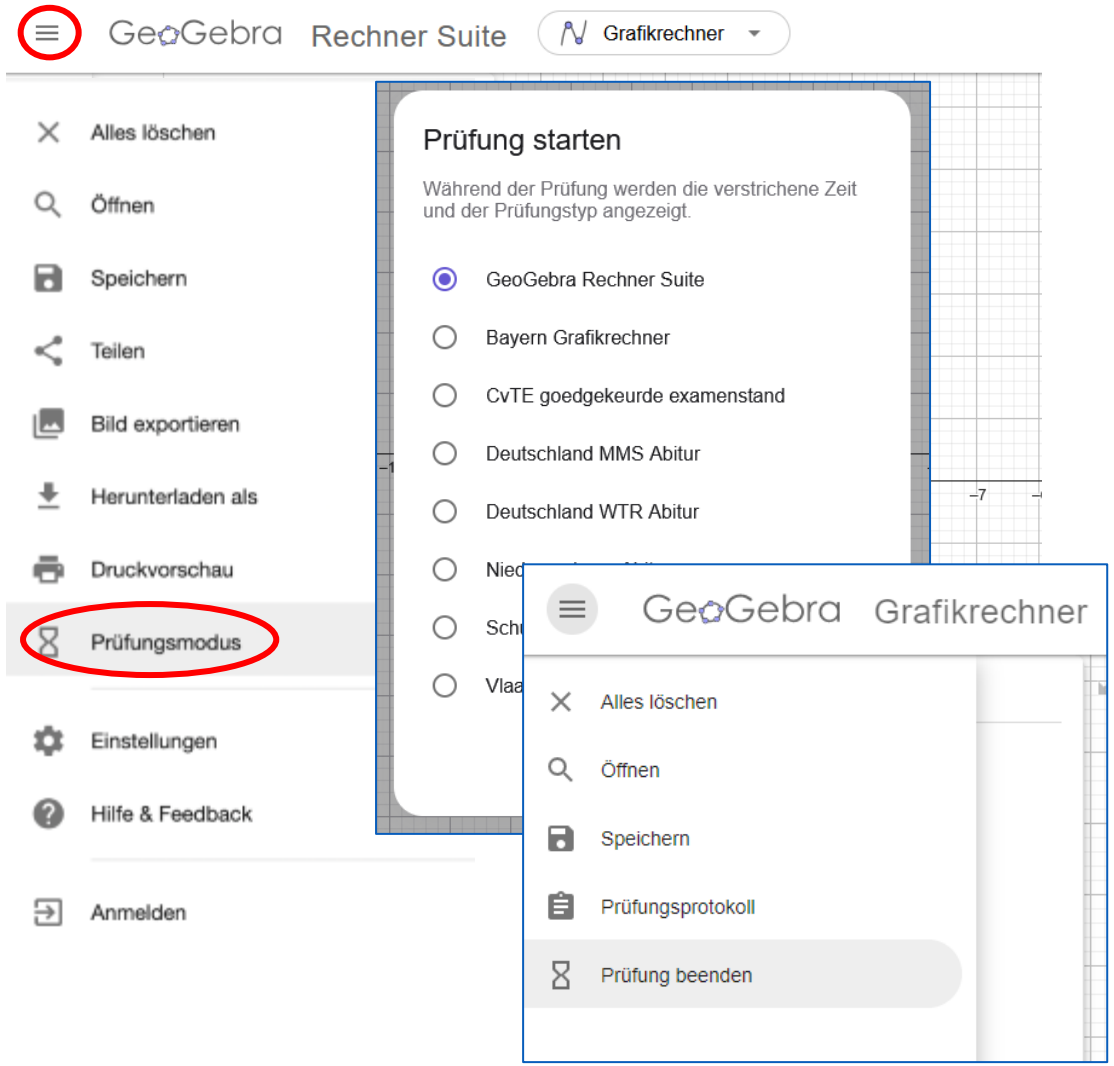
- sperrt mobile Geräte für andere Anwendungen
- Vollbildschirm-Fenster mit visuellem Alarm (dauerhaft) bei Verlassen der App
- automatisch generiertes Prüfungsprotokoll mit Beginn, Ende und Alarmzeiten
- Prüfungsmodus NICHT in der Webversion der Rechner Suite

Prüfungsmodus Protokoll



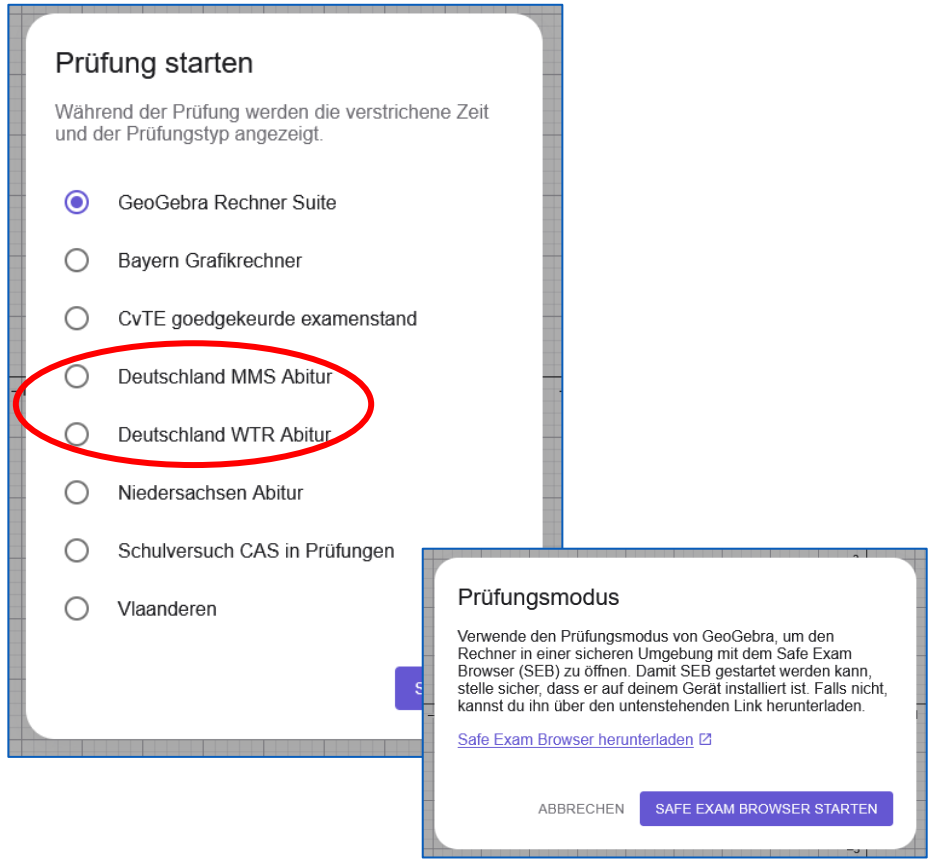
- protokolliert Verlassen der App
- sichtbare Leiste links (bzw. Kopf-/Fußzeile)
  grün *alles ok*, **rot** *Alarm Fenster wurde verlassen*
- Prüfungszeit rechts oben (bzw. mittig)
- Info: öffnet Protokoll mit Alarmzeiten
  (auch über Sandwichmenü, Prüfungsprotokoll)
- Protokoll erscheint bei Prüfung beenden automatisch und wird gespeichert
  (<Zeitstempel>.jpg bzw. ExamLog.png)

Prüfungsmodus starten und beenden



- Starten über Sandwichmenü
  - Prüfungsmodus
    - GeoGebra Rechner Suite (Deutschland MMS / WTR Abitur)
- Smartphone/Tablet: Aufforderung Flugmodus einschalten & Bluetooth deaktivieren
- Beenden über Sandwichmenü
  - Prüfung beenden
- zentral für alle SuS starten/beenden mit
  - MDM (Apple School Manager, Ms Intune, Jamf, …)
  - Classroom (Apple/Google Classroom, …)
  - Safer Exam Browser (siehe übernächste Folie) https://www.geogebra.org/m/y3aufmy8#material/f7cegz3p

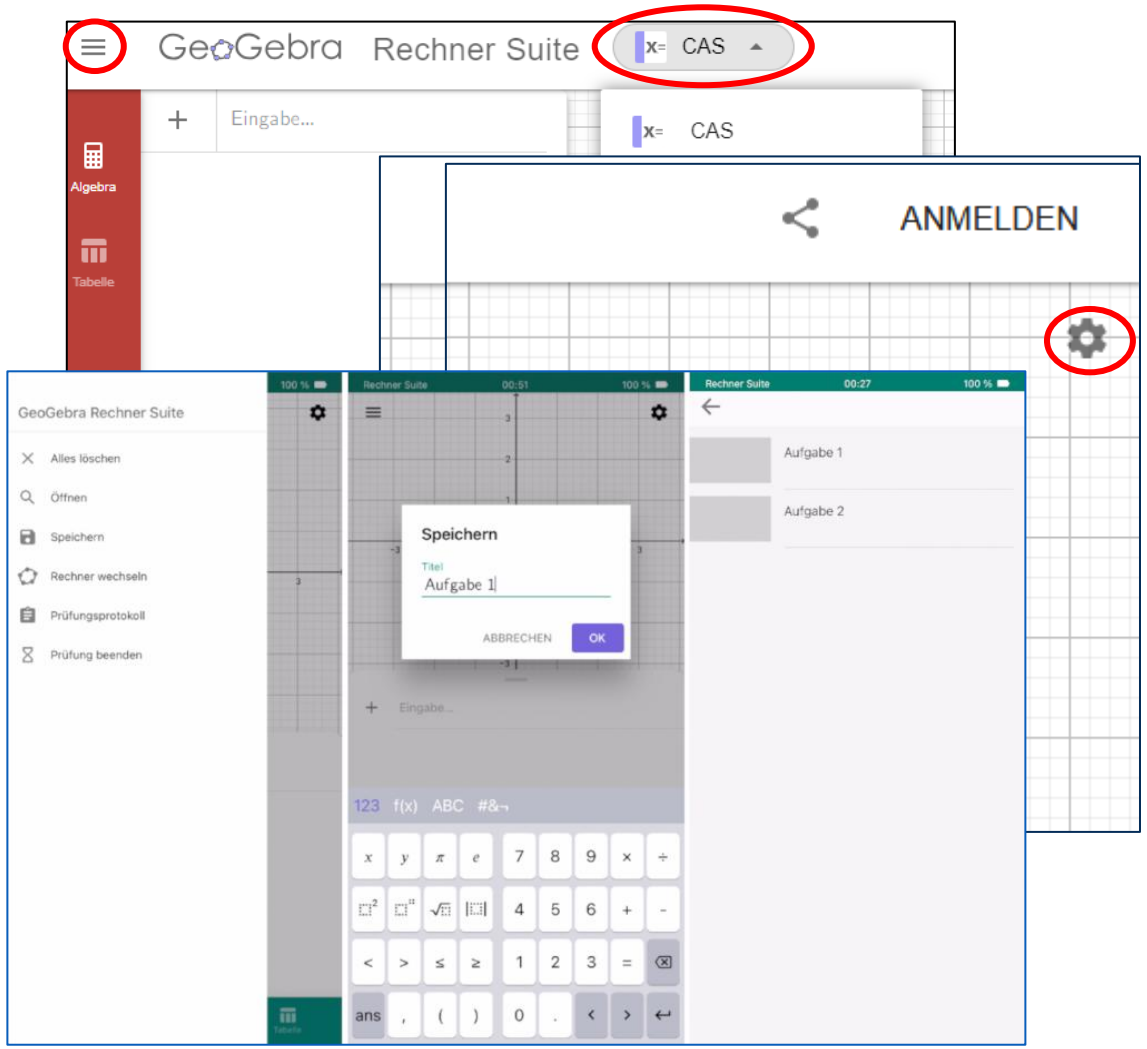
Prüfungsmodus Rechner Suite (IQB MMS)



IQB-zertifizierter Abitur-Modus

- zertifiziert seit Anfang des Jahres
  Spezifikationen s. Workshop-Material
  ABER: kein 3D Rechner, kein Geometrie
- Webversion für MaTeGnu: https://roth.tel/mms
  ***nicht** für Prüfungen*
  (da keine Kontrolle über Browser hinaus) → nur Demo
- Prüfungsmodus: Sandwichmenü links oben
  - Prüfungsmodus auswählen
  - Deutschland IQB MMS Abitur

Prüfungsmodus Funktionen



- Wechsel zwischen Rechnern:
  Menü oben mittig
  (oder Sandwichmenü: Rechner wechseln)
- Einstellungen:
  im Zahnradmenü rechts oben
  (oder Sandwichmenü: Einstellungen)
  Sprache, Dezimalstellen, Achseneinteilung, …
- Dateien speichern & öffnen möglich
  Sandbox: *Dateien existieren nur innerhalb Prüfung*
- GeoGebra-Applets lassen sich so **nicht** einbinden
  → Safe Exam Browser (digitaler Workshop)
  Bsp.: https://www.geogebra.org/m/h9jmuap6

digitaler Workshop zu Safe Exam Browser im Schulcampus RLP unter SC Lernenonline
https://lms2.schulcampus-rlp.de/PL-0006/course/view.php?id=959
OFFEN für ALLE– Infos zur Registrierung unter
https://info.bildungsportal.rlp.de/lehrende/moodle/schulcampus-lernenonline/

GeoGebra Prüfungsmodus am iPad



Zentral verwaltete iPads

- GeoGebra-Prüfungsmodus
  - Individuell wie beschrieben aus GeoGebra-App
  - Zentral über MDM / Apple School Manager
  - Als Safer Exam Browser Lösung
  - ABER: Bluetooth/WLAN muss deaktivierbar sein
- Geführter Modus des iPads
  - Beschränkt Zugriff auf eine App
    https://support.apple.com/de-de/guide/ipad/ipada16d1374/ipados
  - GeoGebra als App nutzen
  - Kurzleitfaden „Onboard-Prüfungsmodus“
    Dank an Hr. Meyberg (Hilda-Gymnasium)

Prüfungsmodus ausprobieren

Sie sind dran: *Laden Sie auf ihrem Handy/Tablet die GeoGebra Rechner Suite herunter (App Store, Play Store) Aktivieren Sie ggf. den Flugmodus. Starten Sie den Prüfungsmodus. Wählen Sie die Variante GeoGebra Rechner Suite aus.*



Bearbeiten Sie die nachfolgende Aufgabe *und*

dokumentieren *Sie Ihr Vorgehen!*



https://www.geogebra.org/calculator?examMode=choose

Aufgabe

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$. Überprüfen Sie, ob die Funktion f Schnittpunkte mit ihrer Ableitungsfunktion hat und bestimmen Sie diese Punkte falls vorhanden.

Prüfungsmodus einführen

Zu Beginn/Während der Unterrichtsreihe

- Entscheidungen zu Prüfungsrahmen frühzeitig festlegen und kommunizieren
  - BYOD oder Schulgeräte
  - CheatSheet (Befehlsliste) erlaubt
  - Zweigeteilte Prüfung?
- Einsatz im Unterricht wiederkehrend üben
  - benötigte Werkzeugkompetenz aufbauen
  - Funktionsumfang Prüfungsmodus
  - Bedienung der Prüfungsendgeräte
- Dokumentation
  - Fach- und Werkzeugsprache
  - Vorgehen beschreiben und begründen



Prüfungsmodus einüben



In den Stunden vor der Prüfung

- Alarmfunktion erklären
- Vorgehen bei versehentlichem Alarm klären
  (Kriterium: Dauer der „Abwesenheit“)
- Szenario techn. Probleme
  (Ersatzgeräte, Vorgehen beschreiben)
- Betrugsversuche strikt ahnden: klar benennen Was? Wie?
- Ansage: keine gegenseitige Ausleihe (wg. Datei speichern)
- CheatSheet (Befehlsliste) durchgehen
- **Probelauf** mit Übungsaufgabe(n)
- Prüfung ggf. in Teile strukturieren – Ablauf üben
  - Hilfsmittelfreier Teil
  - MMS-Teil mit separatem Aufgabenblatt

Prüfungsmodus einsetzen

In der Prüfung

- Ablaufvarianten bei zwei Teilen (MMS/hilfsmittelfrei):
  - nur Aufgaben des jeweiligen Teils austeilen,
    nach Abgabe Bearbeitung
  - feste (max.) Bearbeitungszeit
  - falls MMS-Teil zuerst
    Ende: Abgabe MMS-Geräte (Bearbeitung kann verbleiben)
    Zeit, um Protokolle zu prüfen
  - falls hilfsmittelfreier Teil zuerst
    Ausgabe MMS-Geräte erst danach
    Protokolldatei per airdrop nach Einsammeln der Bearbeitung
- BYOD kein Gerät: Vorgehen beschreiben lassen
- stichprobenartige Kontrolle (Flugmodus-Zeichen, grüner Balken)
- Lehrkraft: eigenes Handy für Foto (MMS + AB mit Namen daneben)
- keine Angst vor Betrugsversuchen



4 Werkzeugkompetenzen

GeoGebra als Werkzeug nutzen

Sicht-struktur

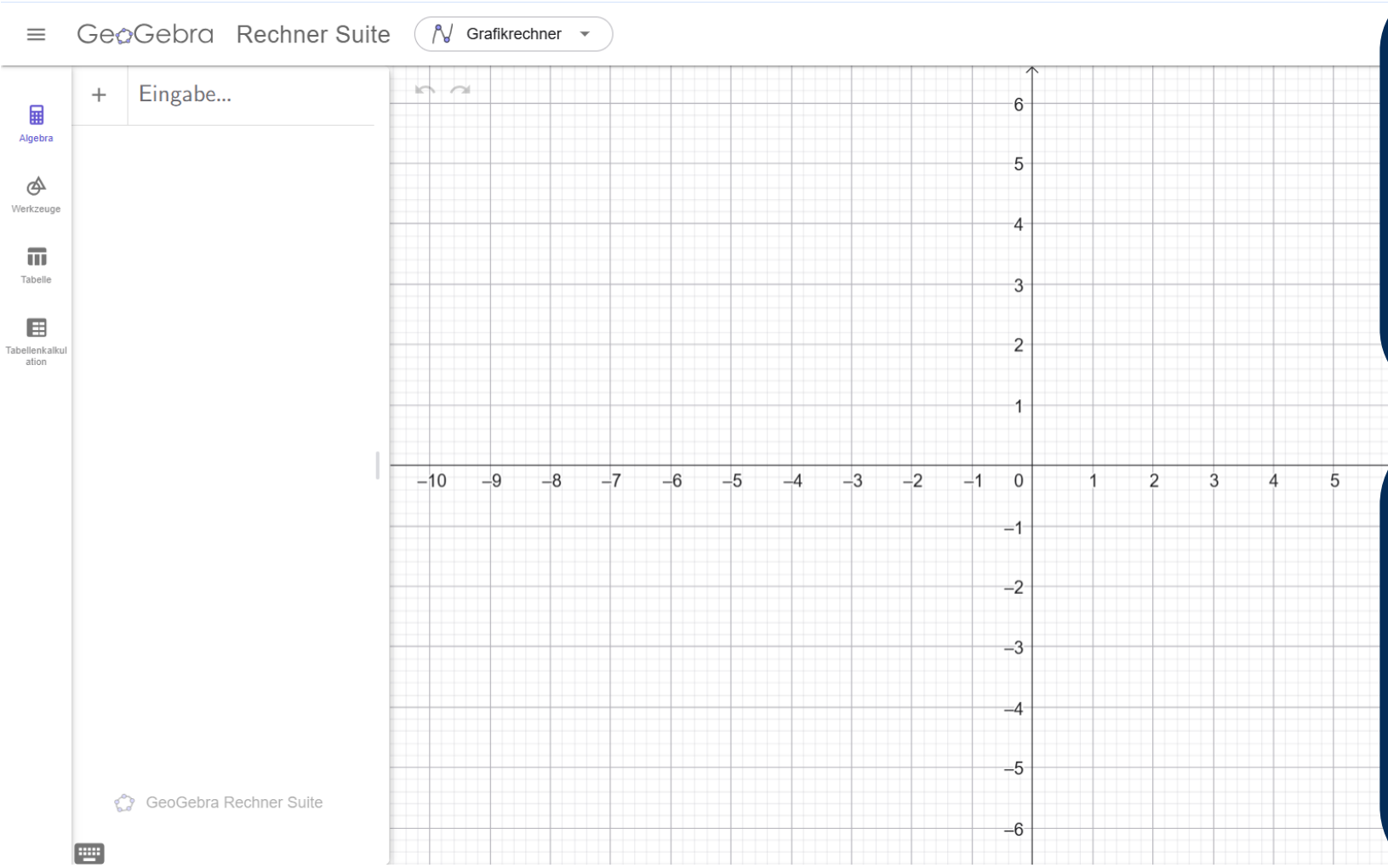
Aufgabe

Tiefenstruktur

Mathematik

- Mathematische Objekte und Konzepte
- Grund-vorstellungen
- Mathematische Strategien
- ...

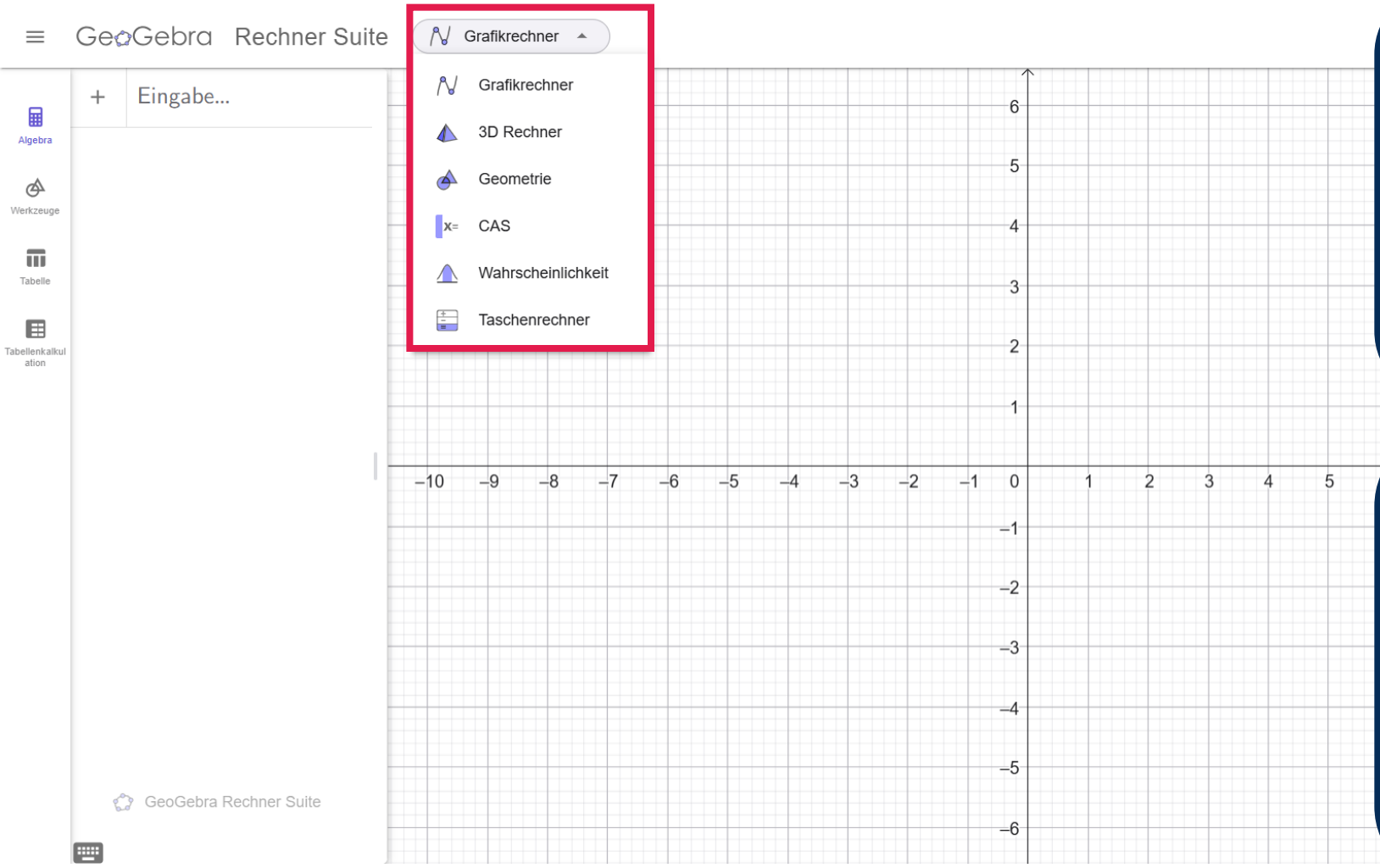
GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

Werkzeug-Strategien
(Barzel & Roth, 2018)

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

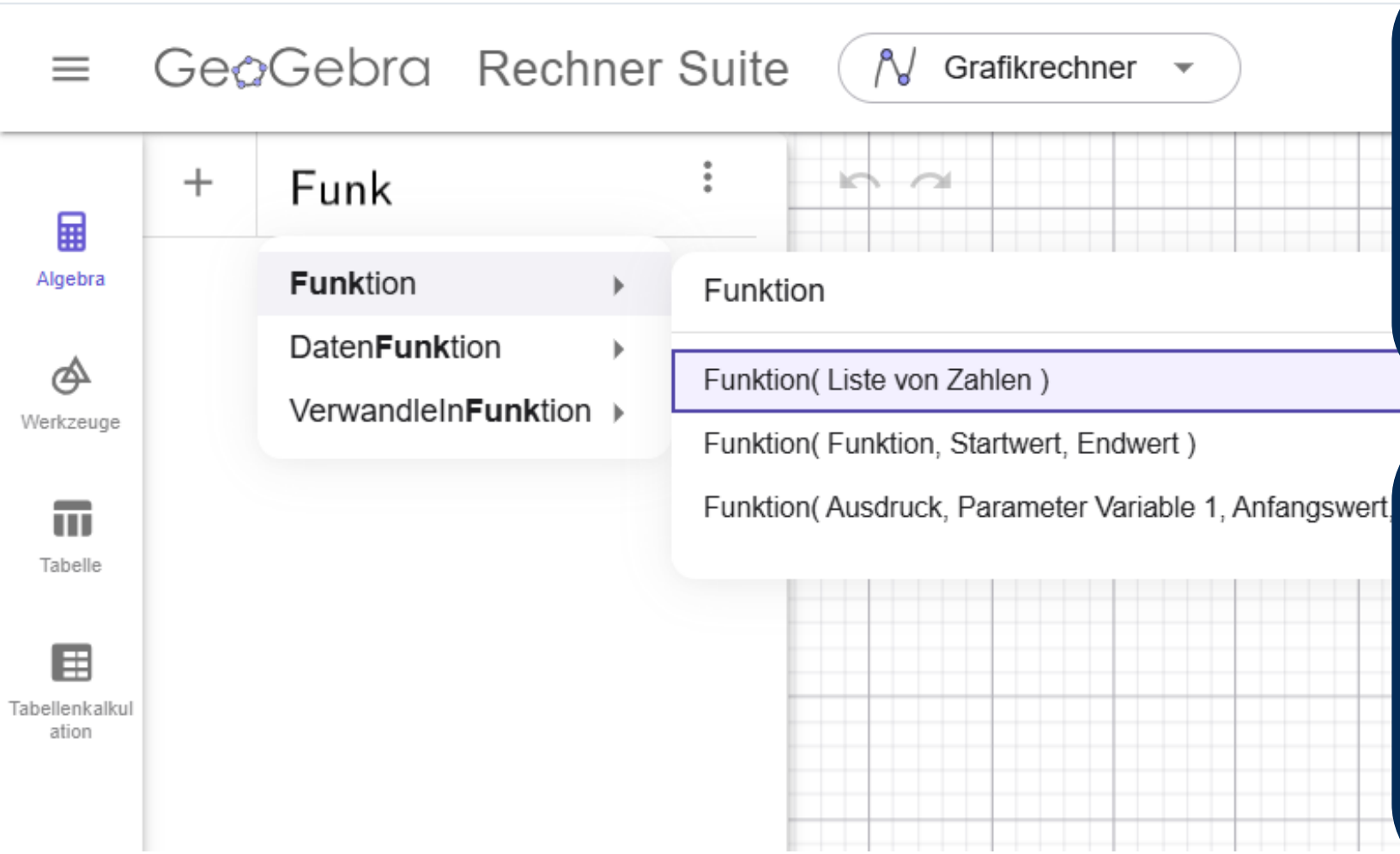
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

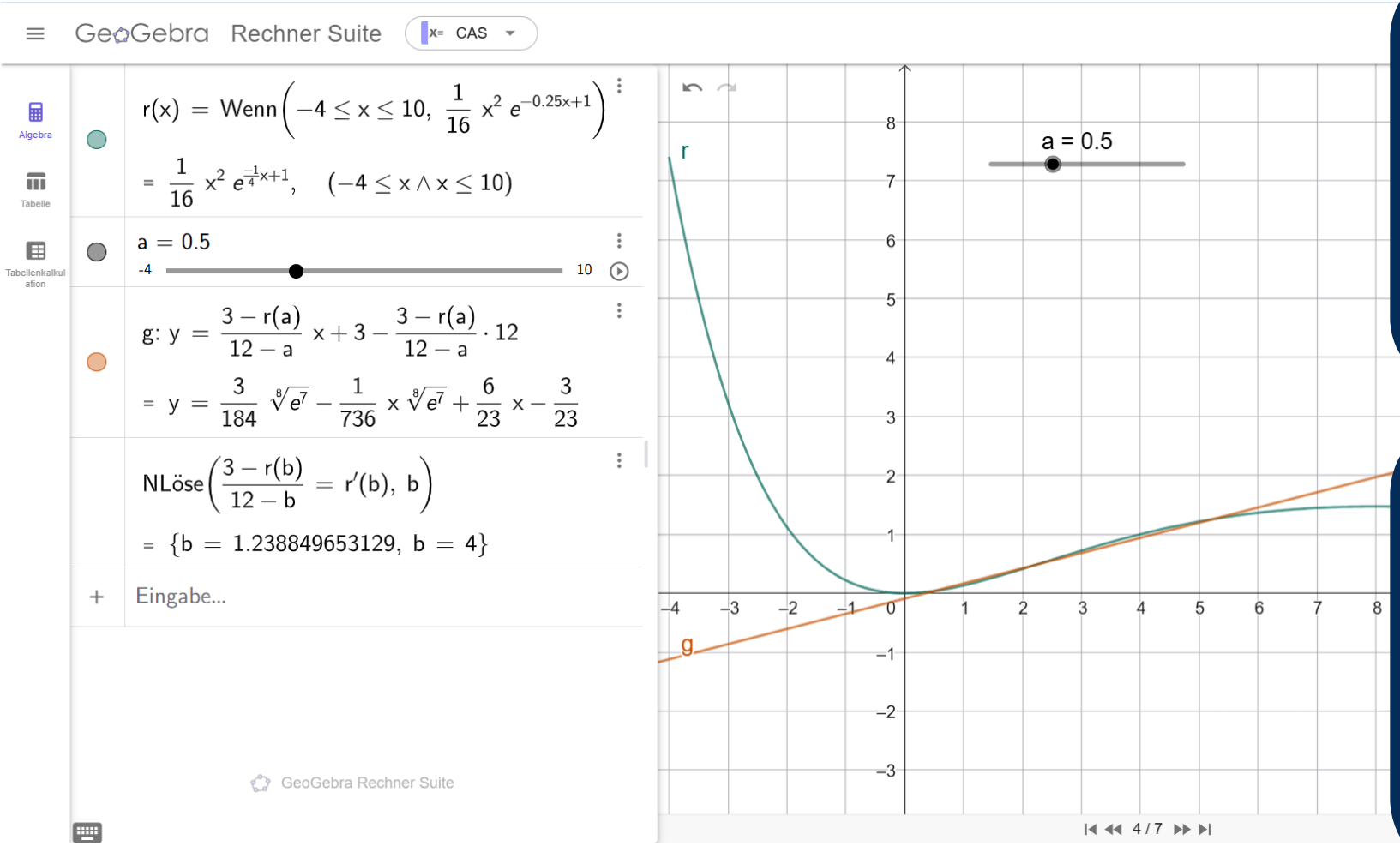
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

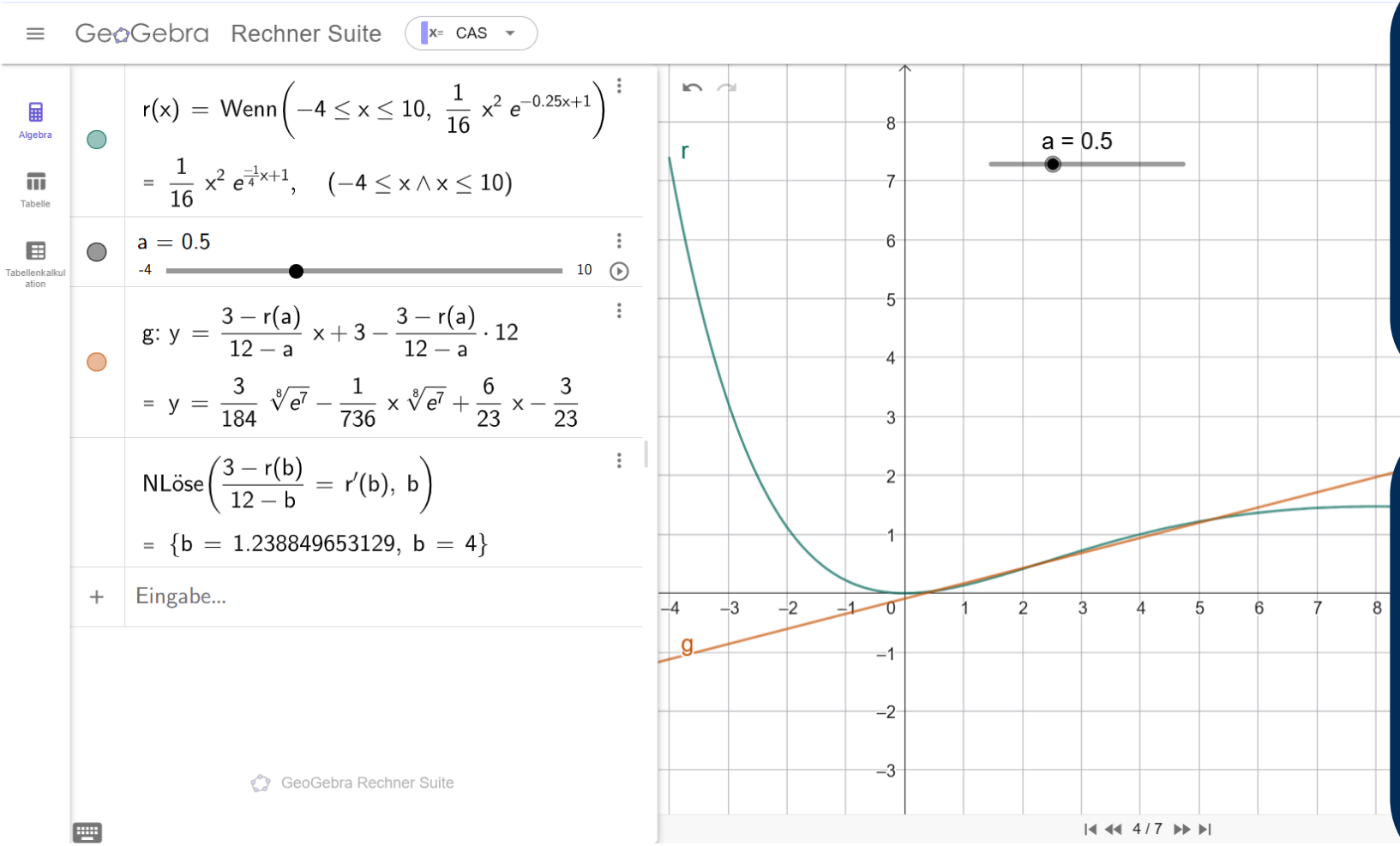
(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

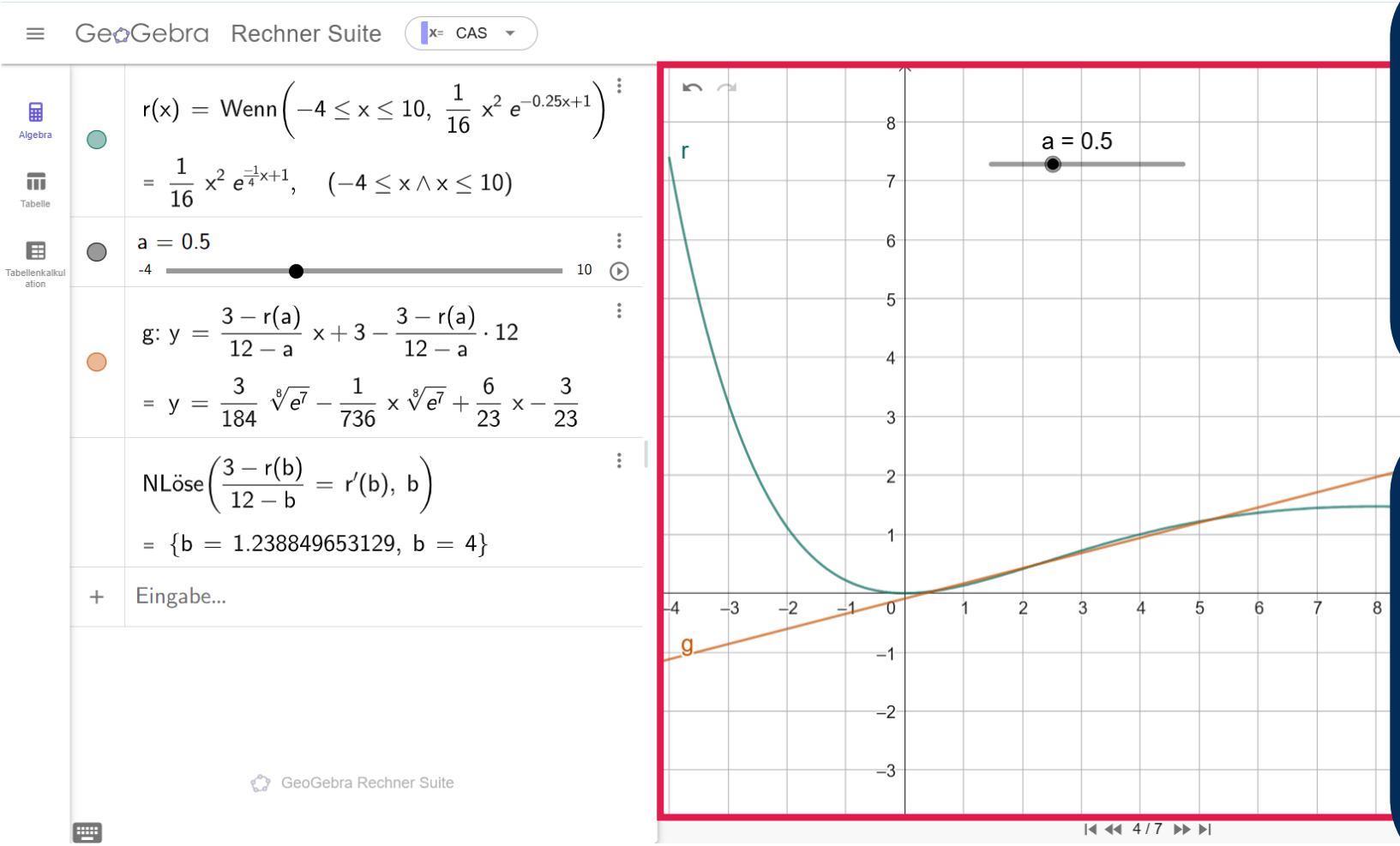
Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

GeoGebra als Werkzeug nutzen



GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

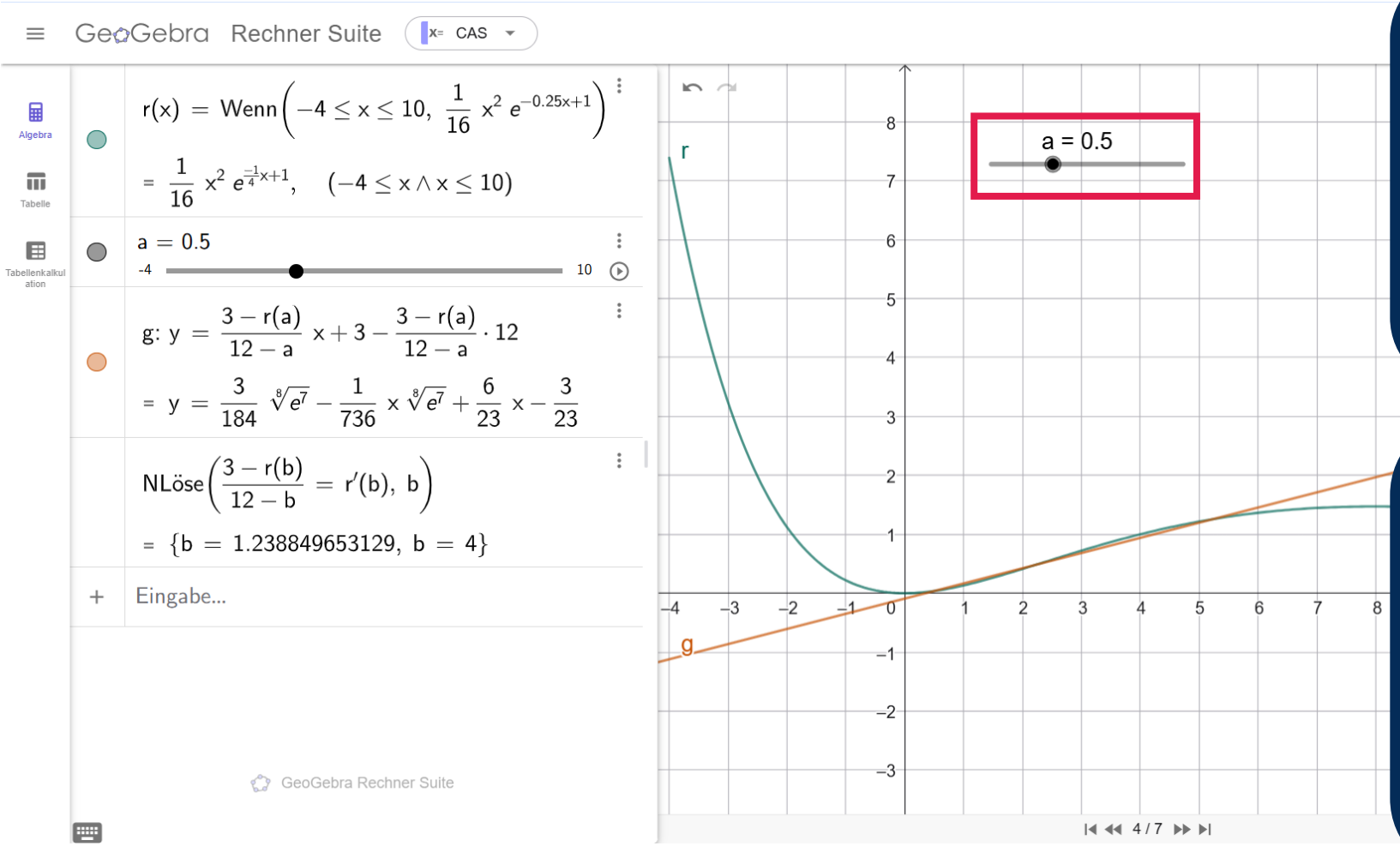
- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

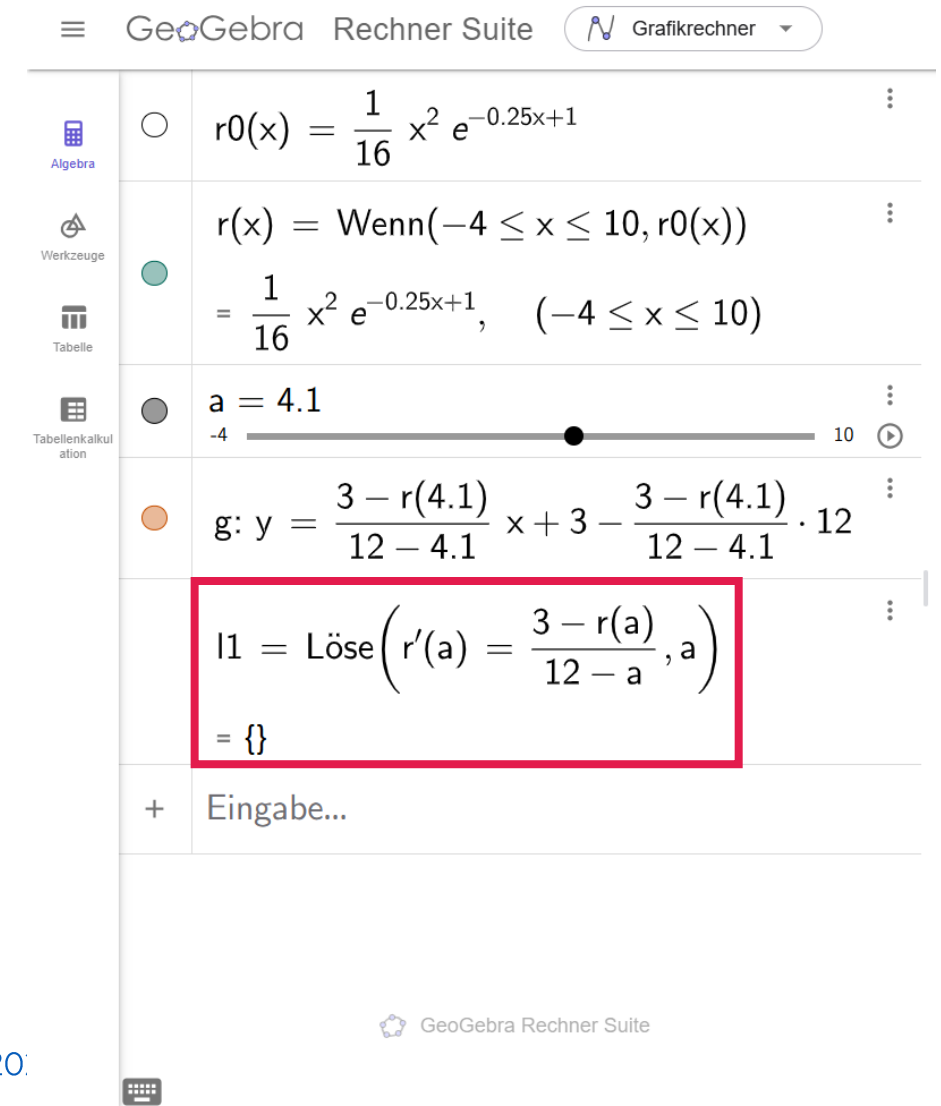
- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

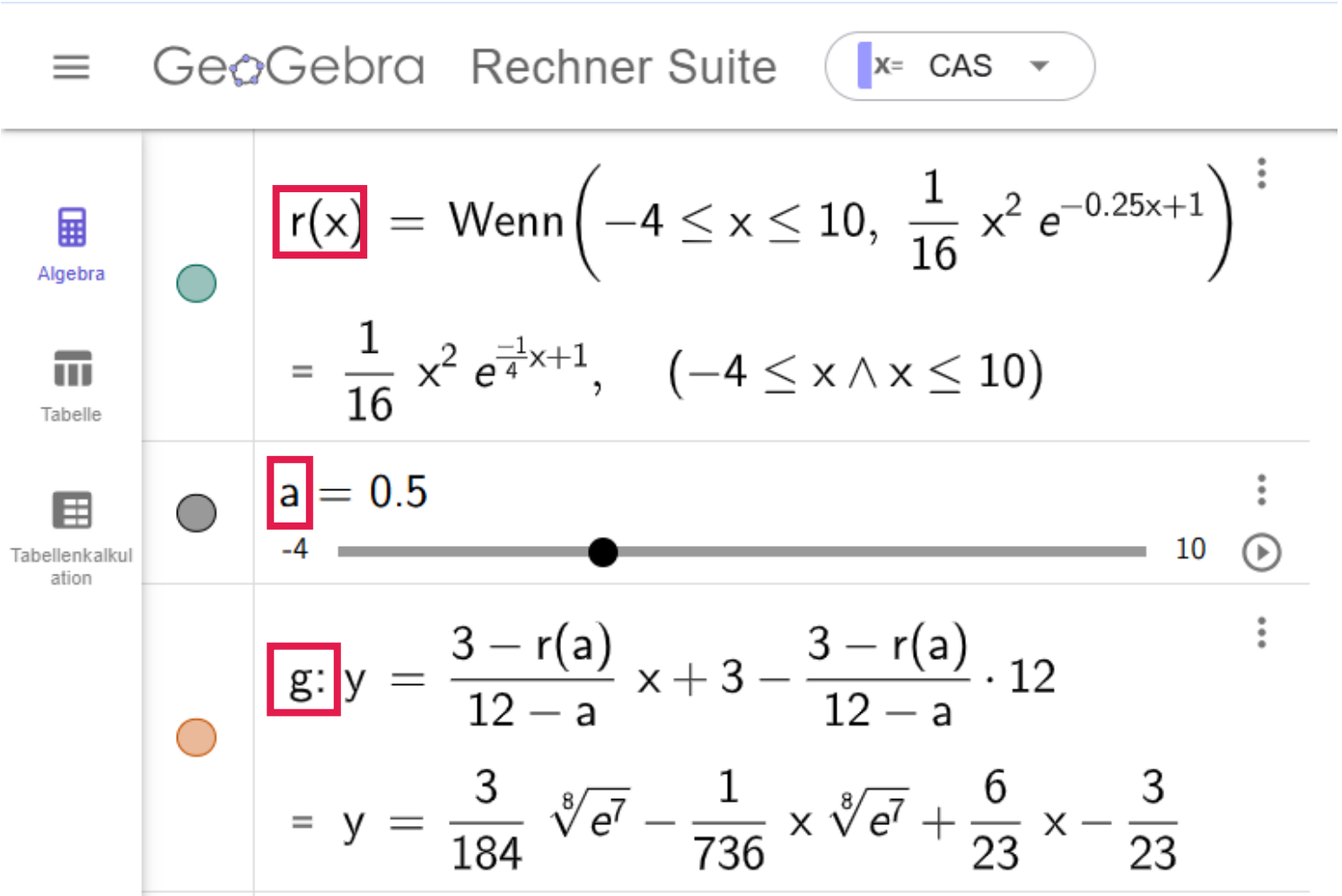
- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen

GeoGebra als Werkzeug nutzen



Werkzeugkompetenzen

(Heintz et al., 2017; Schacht et al., 2022)

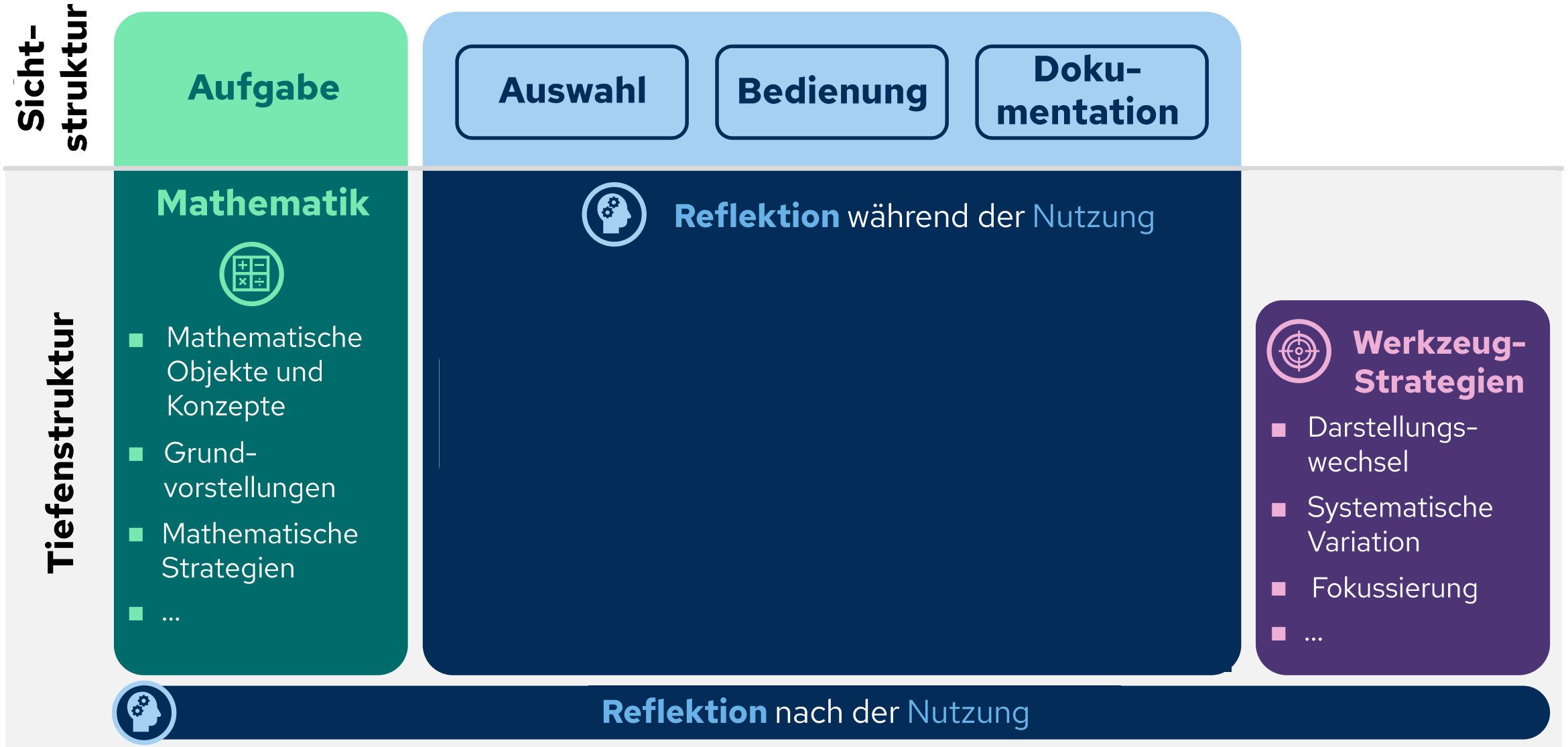
- Auswahl
- Bedienung
- Dokumentation
- Reflexion

Werkzeug-Strategien

(Barzel & Roth, 2018)

- Darstellungswechsel
- Systematische Variation
- Feedback des Werkzeugs nutzen
- Fokussierungshilfe

GeoGebra als Werkzeug nutzen



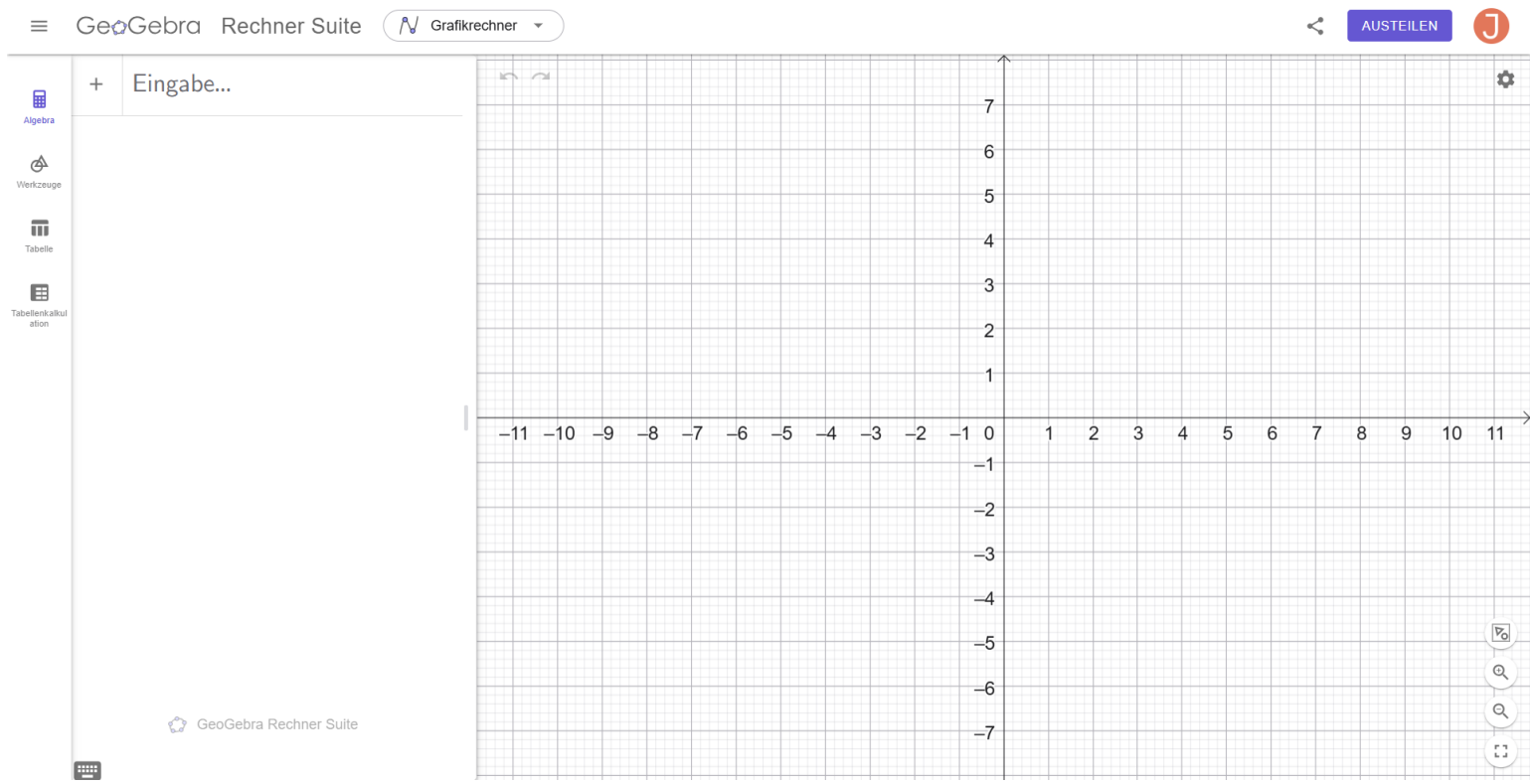
Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB 2025 - Analysis – erhöht – MMS(CAS) – 02 Aufgabe 2d

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.
Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

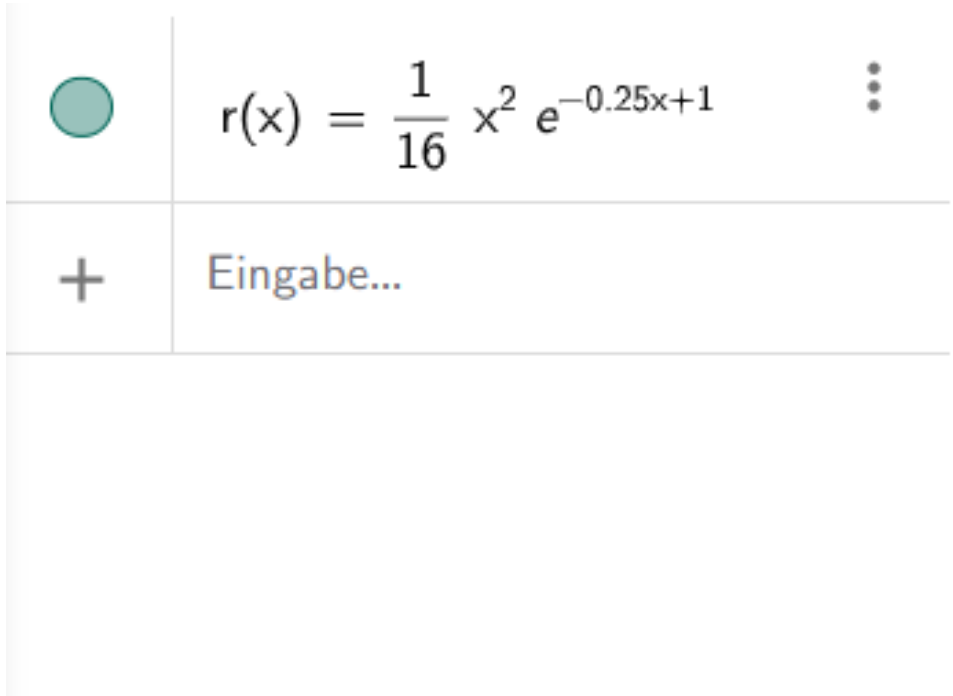
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren

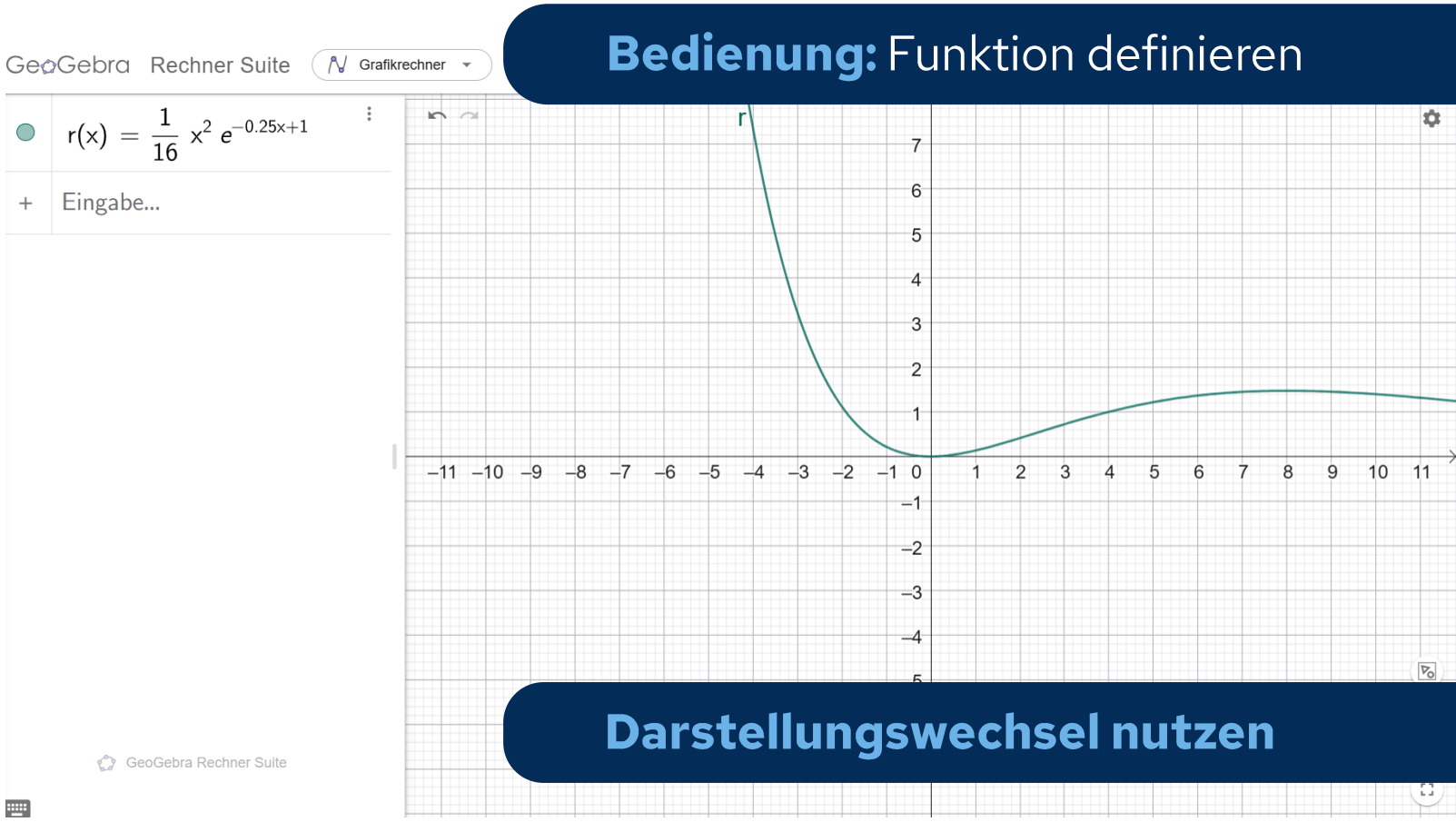


Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.
Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

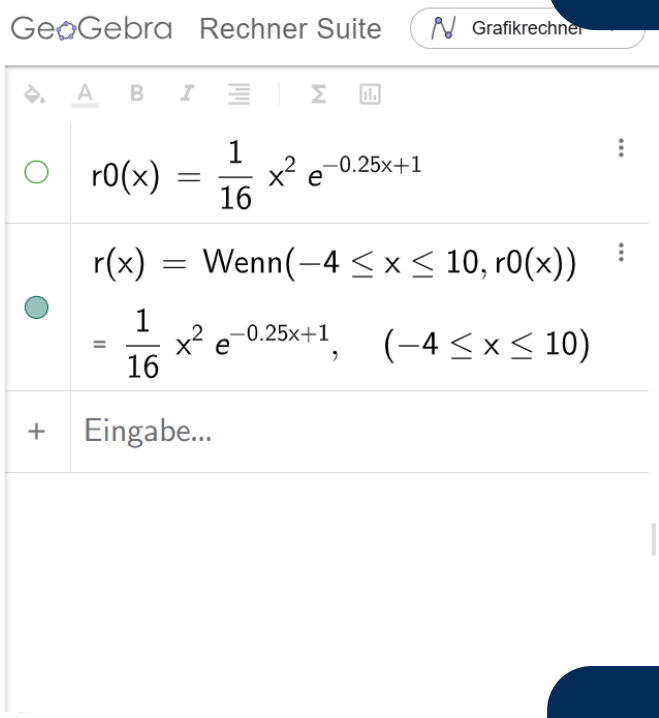
IQB-Aufgabe 2025

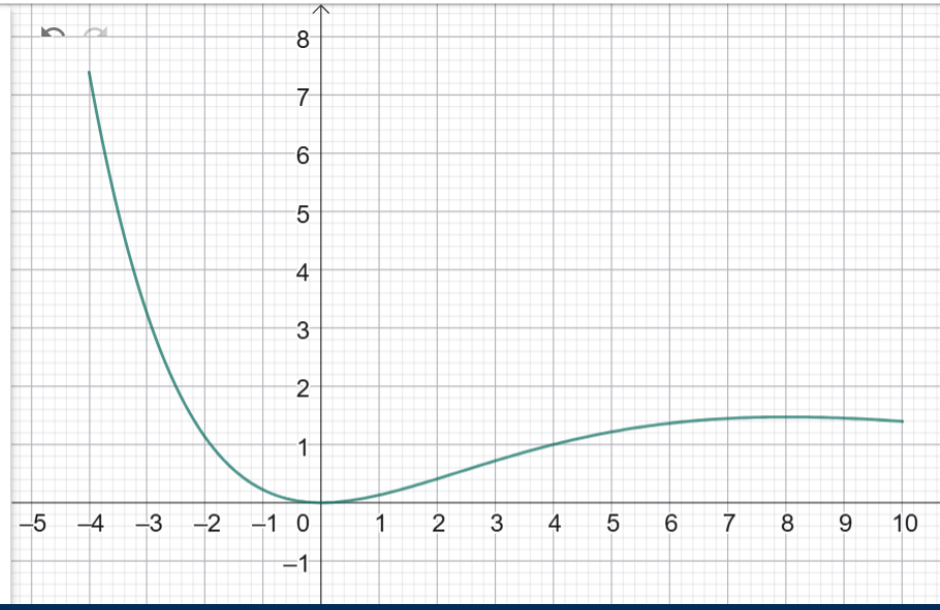
Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren





Darstellungswechsel nutzen

Fokussierungshilfe:
Definitionsbereich und Benennung

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

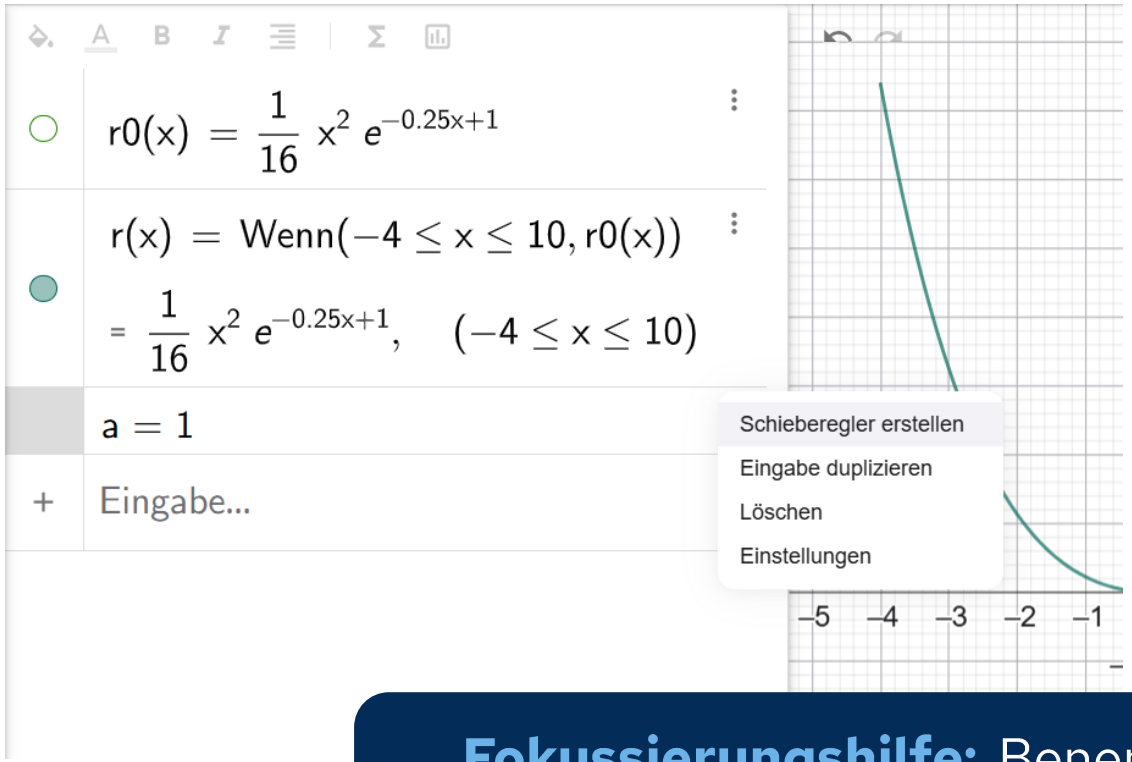
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung:
Schieberegler definieren



Fokussierungshilfe: Benennung

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

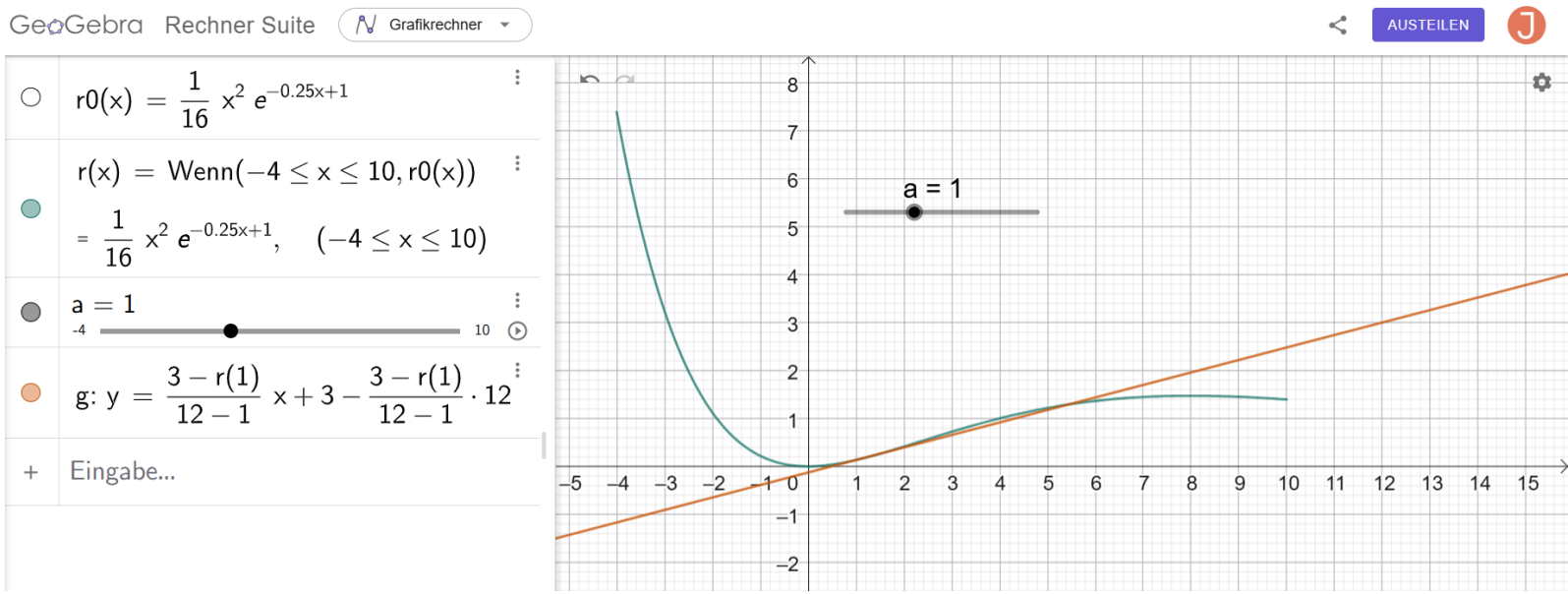
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Funktion definieren



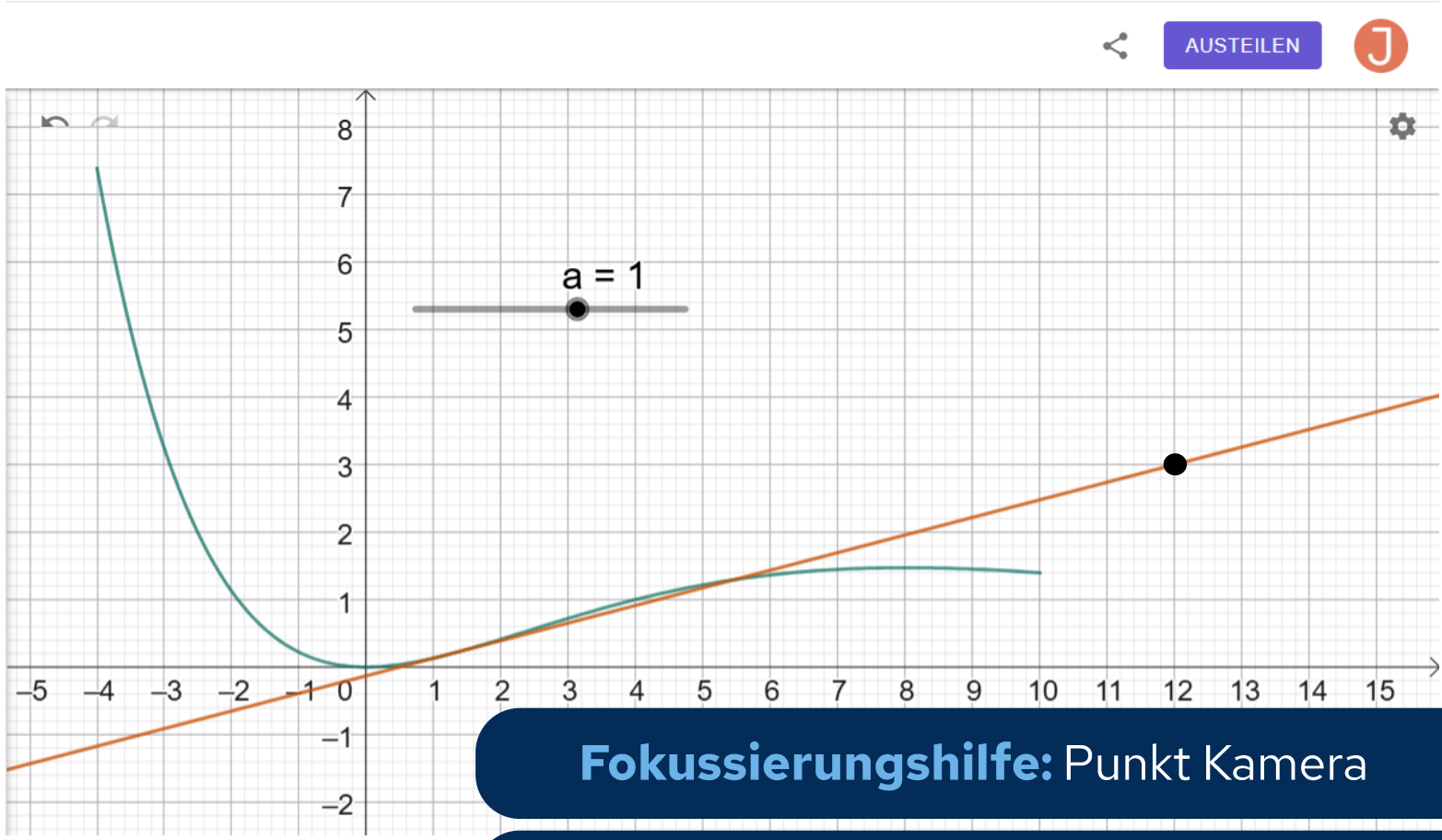
Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Fokussierungshilfe: Punkt Kamera

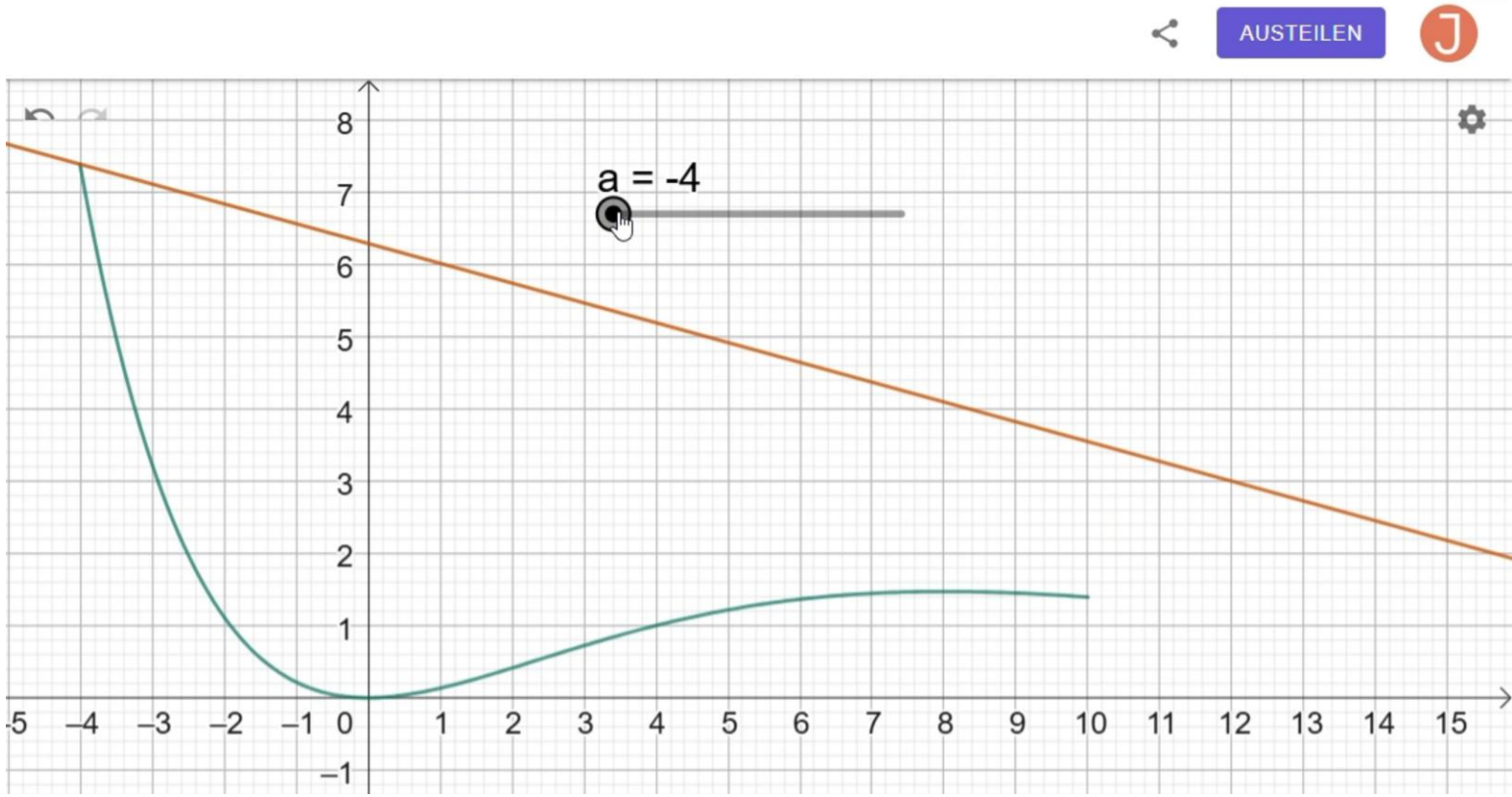
Darstellungswechsel nutzen

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.
Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Systematische Variation

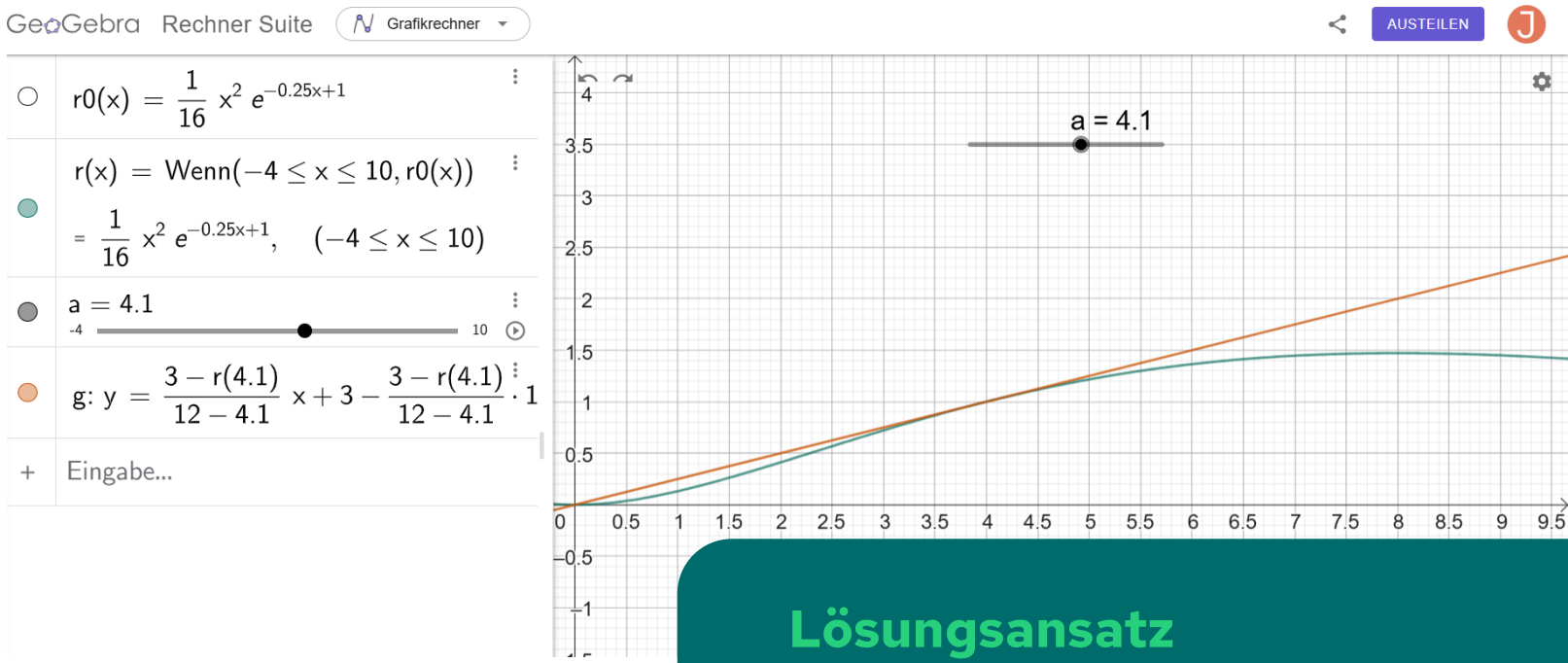
Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Lösungsansatz

$$r'(a) = m_g = \frac{3 - r(a)}{12 - a}$$

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

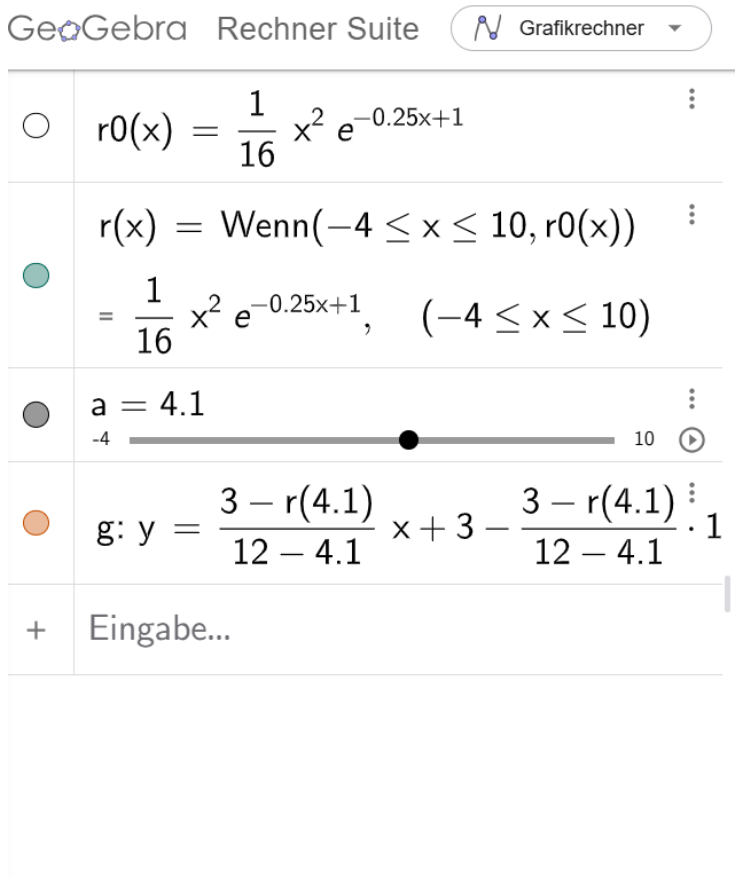
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen



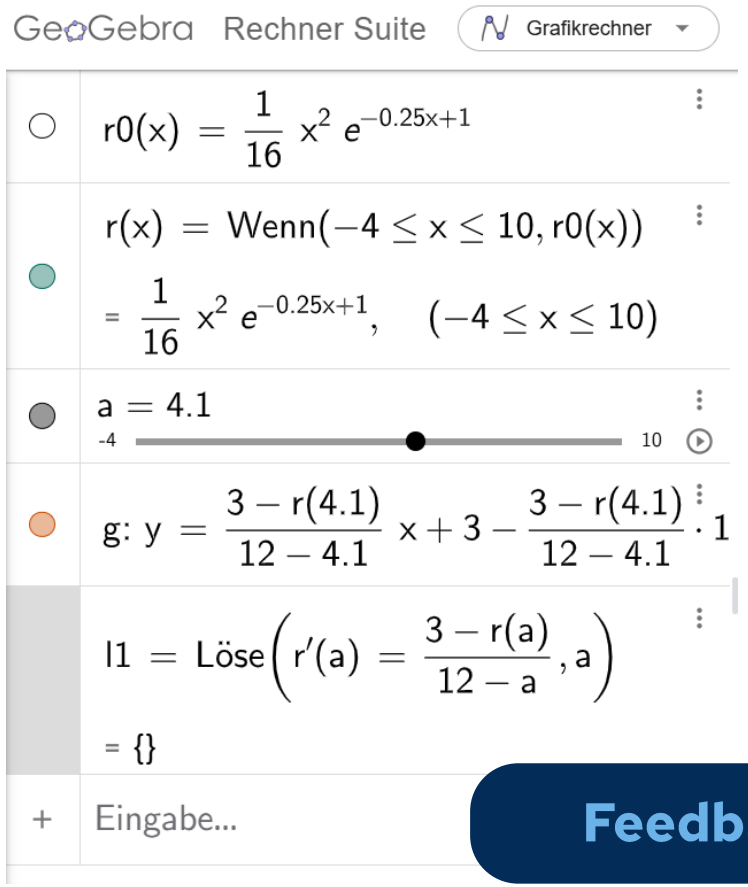
Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.
Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen



Feedback des Werkzeugs nutzen

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

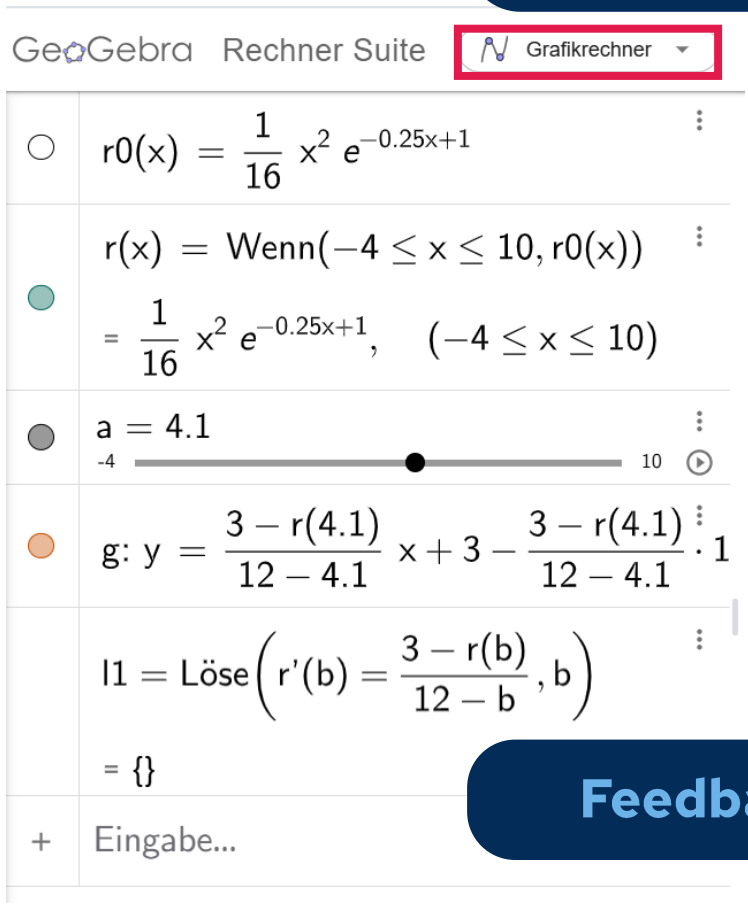
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen



Feedback des Werkzeugs nutzen

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

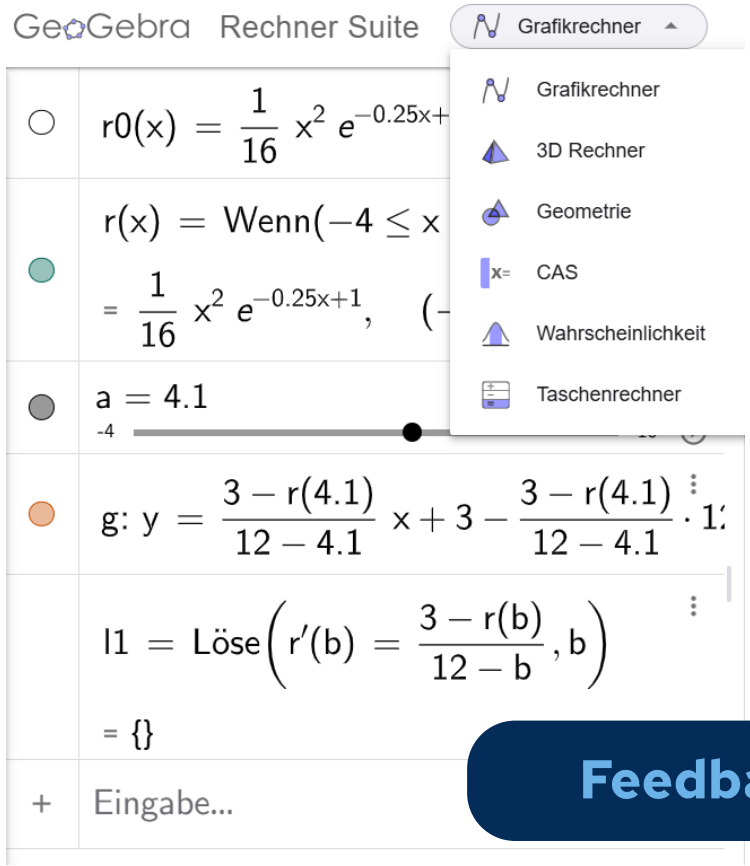
IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Bedienung: Gleichung lösen



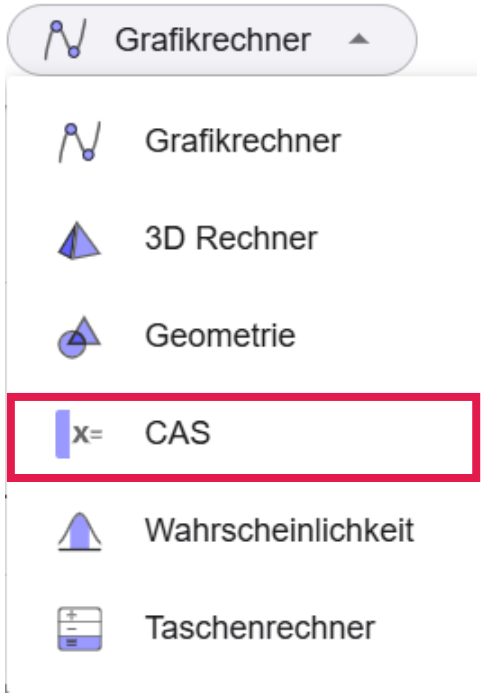
Feedback des Werkzeugs nutzen

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.
Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.



Bedienung: Gleichung lösen

Auswahl: GeoGebra CAS-Rechner

Feedback des Werkzeugs nutzen

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

IQB-Aufgabe 2025

Eine Rutschbahn wird für $-4 \leq x \leq 10$ durch die Funktion r mit $r(x) = \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0{,}25x+1}$ modelliert.

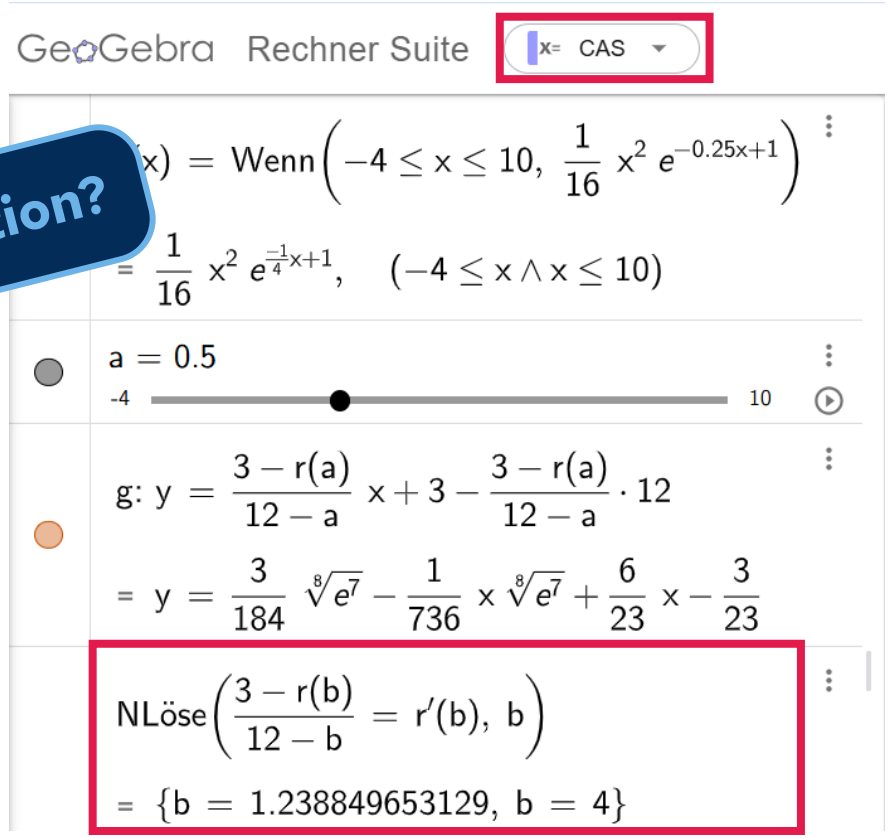
Die Sichtlinie einer Kamera, die in $(12|3)$ positioniert ist und auf $(a|r(a))$ zeigt, wird durch die Gerade g mit $g: y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a}12\right)$ beschrieben.

Prüfen Sie, ob der rechtsgekrümmte Teil des Graphen von r vollständig von der Kamera einsehbar ist.

Auswahl: GeoGebra CAS-Rechner

Bedienung: Gleichung lösen

Dokumentation?



RPTU

Abitur-Aufgabe mit GeoGebra lösen

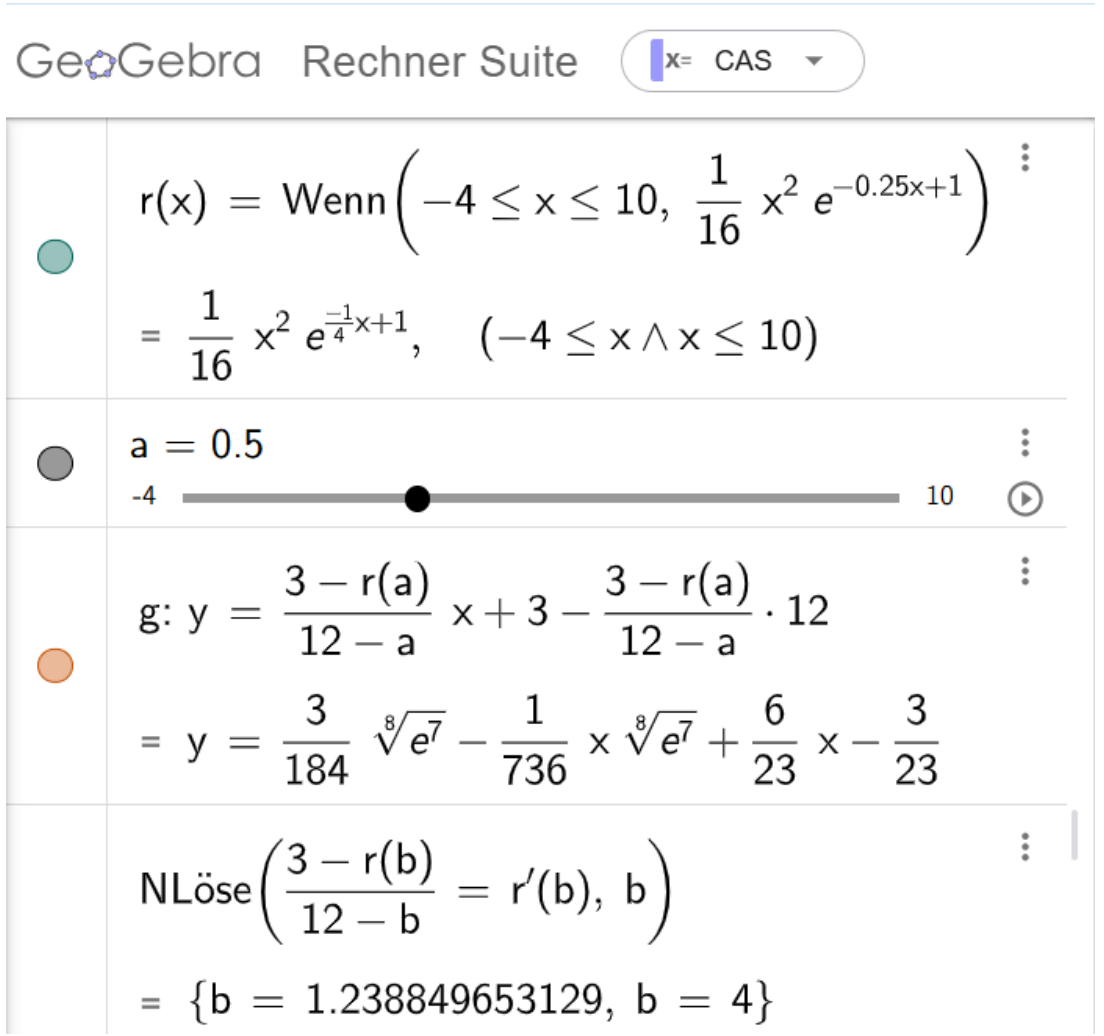
Dokumentation:
Fach- und Werkzeugsprache

- GeoGebra CAS-Rechner auswählen
- Maximale Sichtlinie der Kamera:

$$r'(a) = m_g \Leftrightarrow r'(a) = \frac{3 - r(a)}{12 - a}$$

$$\xrightarrow{Löse()} a = 1{,}24 \vee a = 4$$

weiterer Lösungsweg:
„...ob der rechtsgekrümmte Teil..."
→ $r''(a)$ für beide Lösungen berechnen
für $a < 4$ ist $r'(a) > r(4)$
→ nicht einsehbar (Graph)
ggf. Wendepunkte berechnen



Hausaufgabe...

Sie sind dran: *Nutzen Sie die GeoGebra Rechner Suite im Browser oder als App.*

Bearbeiten Sie die vorgestellte Aufgabe *und*

dokumentieren *Sie Ihr Vorgehen!*



Überlegen Sie sich anhand des Erwartungshorizonts der Aufgabe und des in Kapitel 1 vorgestellten Rasters welche kognitiven Aktivitäten diese Aufgabe abprüft. Was ist prozedural was konzeptuell, welche Stufen?

Aufgabe

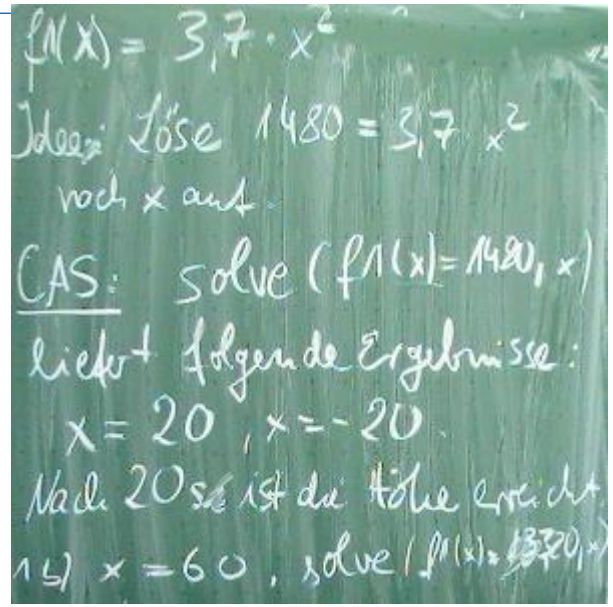
IQB 2025 - Analysis – erhöht – MMS(CAS) – 02 Aufgabe 2d

5 Dokumentation von Lösungen

Werkzeugsprache

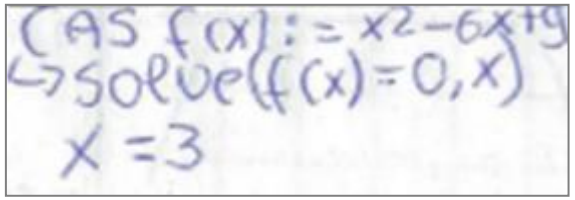
begegnet SuS in…

- Äußerungen/Dokumenten der Lehrkraft (Tafelbild)
- Schulbüchern, Lernumgebungen, …
- Aufgabenstellungen und -bearbeitungen

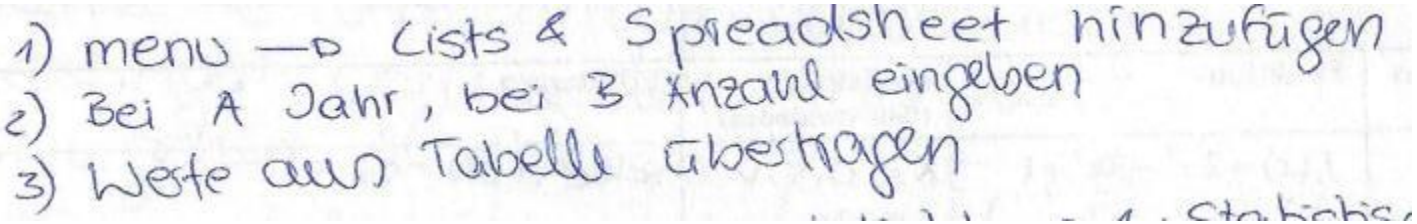


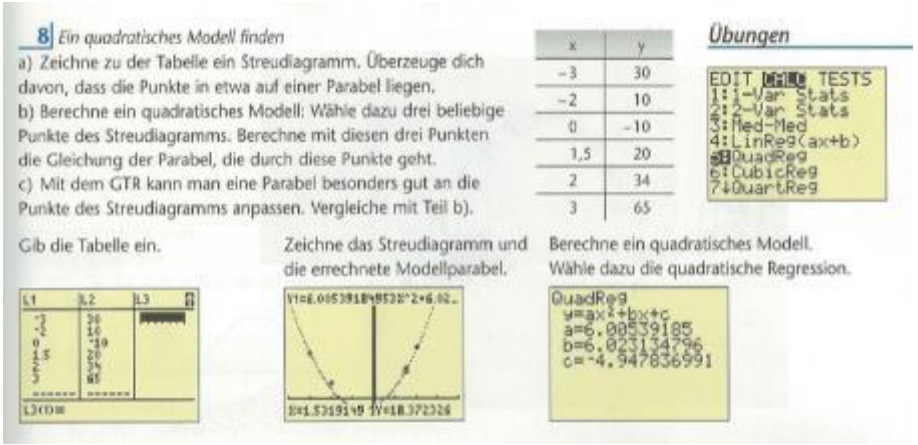


$$f'(x) := \frac{d}{dx}\left(F(x)\right)$$









Dokumentationsvarianten

Kriterien für Dokumentation im Unterricht

- nicht nur den Bildschirm abschreiben
- Lösung muss für andere verständlich sein
- Lösung beschreibt mathematische Vorgehensweise, nicht nur die Bedienung des Werkzeugs



manchmal angemessen, aber eben nicht immer!

Potential: Protokoll

- Erinnerungsstütze (Beginn einer Unterrichtsreihe)
- genaue Beschreibung des Vorgehens (für Mitschüler)
- Bedienung wird genau dokumentiert

Grenzen: Prüfung

- nicht nachvollziehbar z. B. für Fremdkorrektor:innen
- keine mathematischen Argumente – Dokumentation Bedienebene

Aber:
Unterschiedliche Funktion der Dokumentation je nach Unterrichtssituation muss berücksichtigt werden.

siehe auch DZLM DigWerk Baustein 4

Bsp. Dokumentationsvereinbarung I

Allgemein: kurz sachlich präzise vollständig

Absolut notwendig

1. Kommentierter Lösungsansatz

a) mit Worten erklären, was gesucht ist / was zu zeigen ist
b) mathematisch korrekt formulieren, was zu zeigen ist (in die Sprache der Mathematik übersetzen)

2. GeoGebra – Rechner

nennen, welcher GeoGebra-Rechner zur Lösung eingesetzt wird: CAS / Grafikrechner / 3D-Rechner…

3. GeoGebra - Befehle

a) notieren, welche Befehle benutzt werden und was genau in GeoGebra eingegeben wird
b) aufschreiben, welches Ergebnis GeoGebra mit dem Befehl liefert

4. Ergebnis interpretieren

Das GeoGebra-Ergebnis muss (im Sachzusammenhang) interpretiert werden.

Wenn in einer Aufgabe zweimal dasselbe Vorgehen angewendet wird, muss dieses nur einmal ausführlich dokumentiert werden.

Bsp. Dokumentationsvereinbarung II

Operatoren bei der Dokumentation

Lösungsweg frei wählbar:

Folgende allgemeine Operatoren ohne weitere Spezifikation lassen den Lösungsweg offen, d.h. ihr könnt das Problem so lösen, wie es am schnellsten/einfachsten für euch ist. Graphisch (numerisch), mit CAS, argumentativ, ohne Hilfsmittel … alles möglich, wenn folgende Operatoren auftreten:

- Zeigen Sie…
- Weisen Sie nach…
- Bestimmen Sie…
- Ermitteln Sie…
- Untersuchen Sie…
- Begründen Sie…

CAS-Rechner:

Der CAS-Rechner muss eingesetzt, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

- Berechnen Sie…
- Bestimmen Sie rechnerisch…
- Zeigen Sie rechnerisch…
- Untersuchen Sie rechnerisch…
- Ermitteln Sie rechnerisch…

Grafikrechner:

Der Grafikrechner muss eingesetzt werden, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

- Bestimmen Sie graphisch/numerisch…
- Zeigen Sie graphisch/numerisch …
- Untersuchen Sie graphisch/numerisch …
- Ermitteln Sie graphisch/numerisch …

Ohne Rechner:

Ohne einen Rechner muss eine Aufgabe gelöst werden, wenn folgende (spezifizierte) Operatoren auftreten:

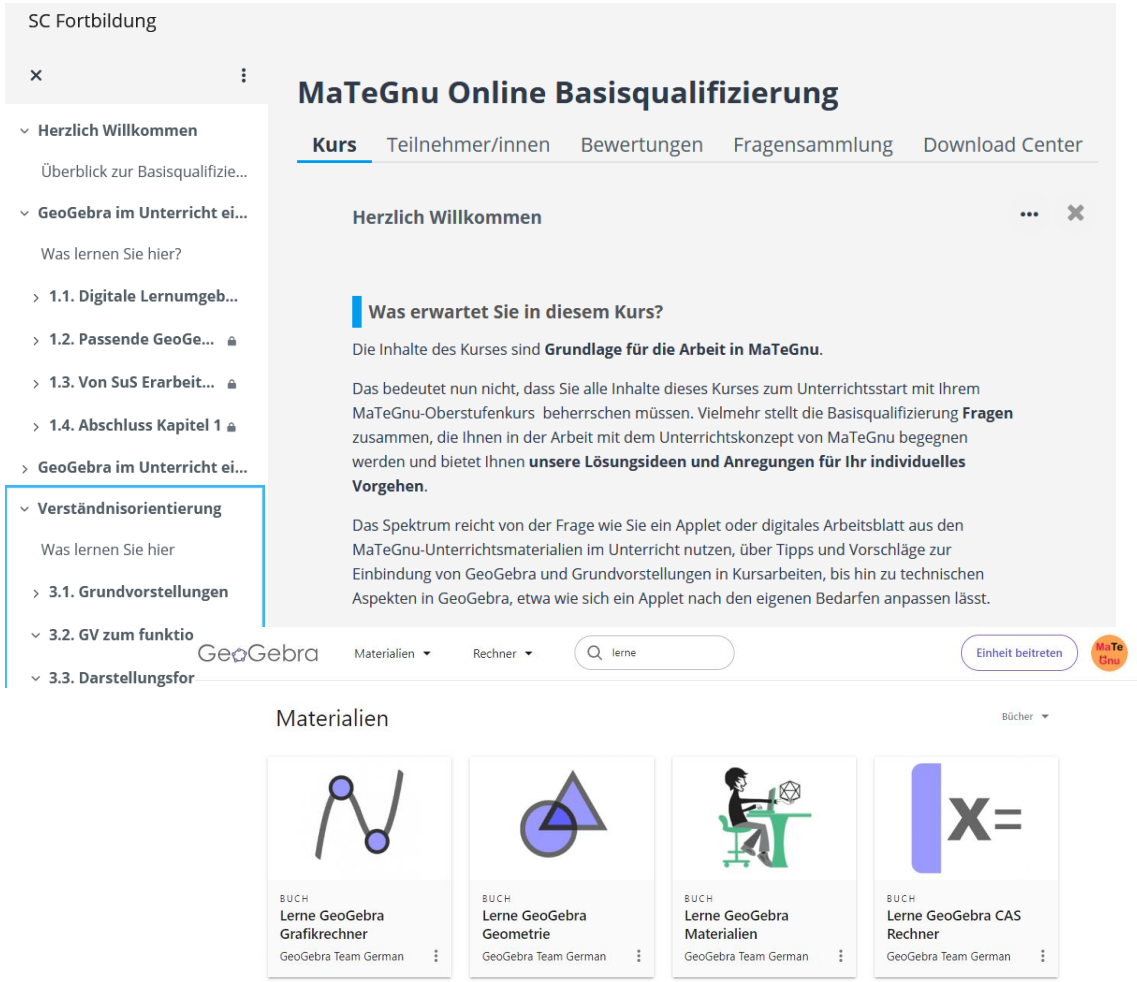
Berechnen Sie ohne CAS….

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel…

Wie weiter?



Wie SELBST weiter...



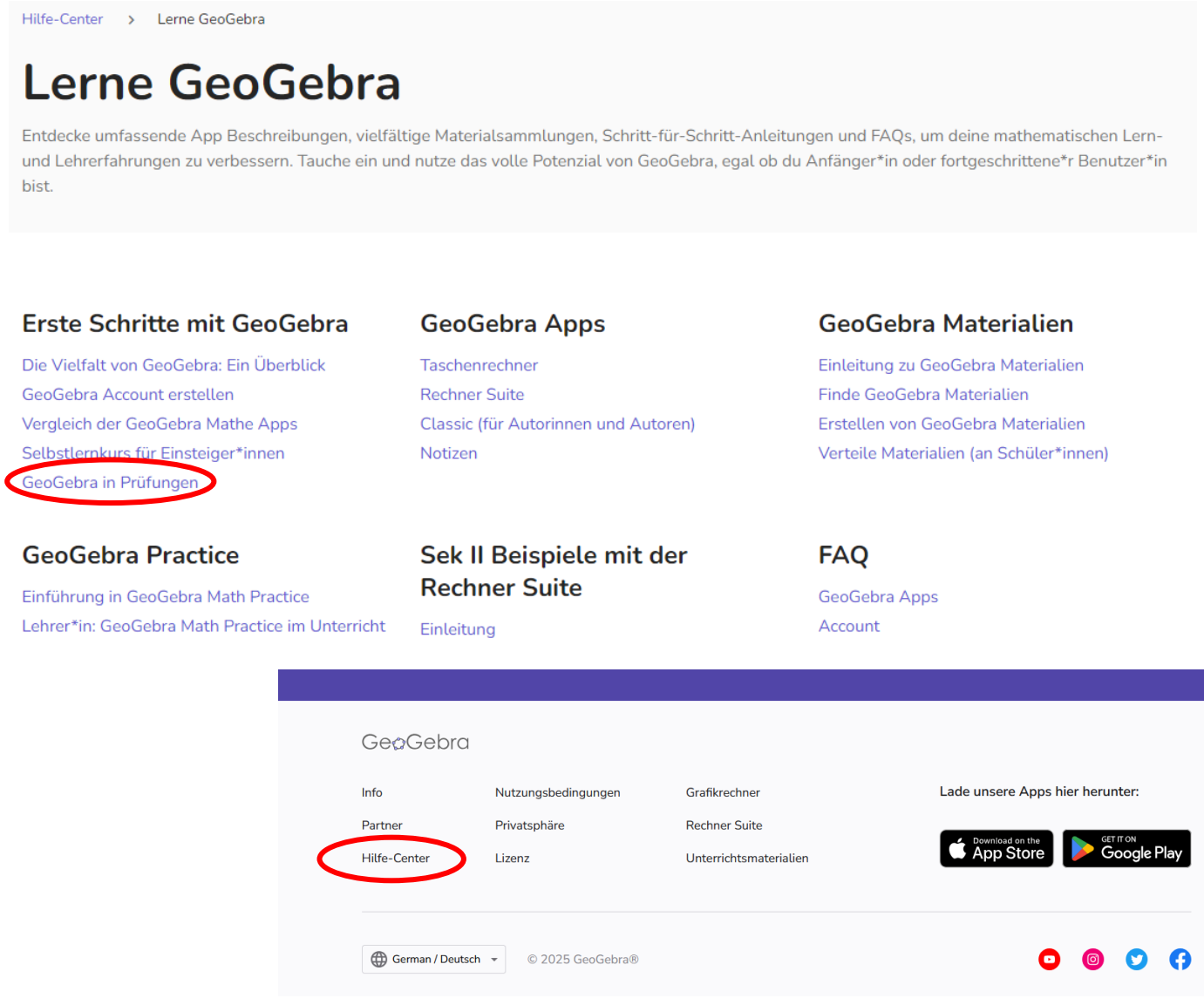
Selbstlernkurse

- MaTeGnu-Basisqualifizierung (Gastzugang)
  Kurs mit Selbstlernbausteinen und Unterrichtserprobungen
  https://mategnu.de/basis (mategnu-gast)
- GeoGebra-Einsteigerkurs des LMZ BW
  moodle-basierte Erklärvideosammlung
  https://moodle1.lmz-bw.de/moodle/course/view.php?id=445

Zu einzelnen Themen

- Hilfe-Center (Startseite ganz unten)
- Lerne GeoGebra (Im Suchfeld „Lerne“ eingeben)
  https://www.geogebra.org/search/lerne
- Ältere Inhalte:
  - YouTube Tutorials des GeoGebra-Teams
    https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel
  - GeoGebra-Wiki https://wiki.geogebra.org/de/

GeoGebra Prüfungsmodus zum Nachlesen



Mehr zum GeoGebra-Prüfungsmodus

- Hilfe-Center
  - Lerne GeoGebra
    - Erste Schritte mit GeoGebra
      - GeoGebra in Prüfungen
- Lerne GeoGebra-Tutorial
  https://www.geogebra.org/m/m97r7cd4

Wie GEMEINSAM weiter...



GeoGebra-Institut Landau (RLP)

- https://geogebra-rlp.de
- Mathematik lehren und lernen 2026 (auch 2027)
  https://geogebra-rlp.de/mlulggb-26/

MaTeGnu-Schule werden

- https://mategnu.de
- Bereits 140 teilnehmende Lehrkräfte
- Bewerbung für die 3. Kohorte (Start Schuljahr 2027/28)

MaTeGnu

Mathematik mit **Te**chnologie
an **G**rundvorstellungen orientiert
nachhaltig **u**nterrichten

GeoGebra als Werkzeug nutzen

Bitte geben Sie mir eine Rückmeldung zum Workshop!

Gehen Sie auf

www.menti.com

Geben Sie diesen Code ein

2470 8168



Oder verwenden Sie den QR-Code.

Gehen Sie auf menti.com 2470 8168

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

mategnu.de



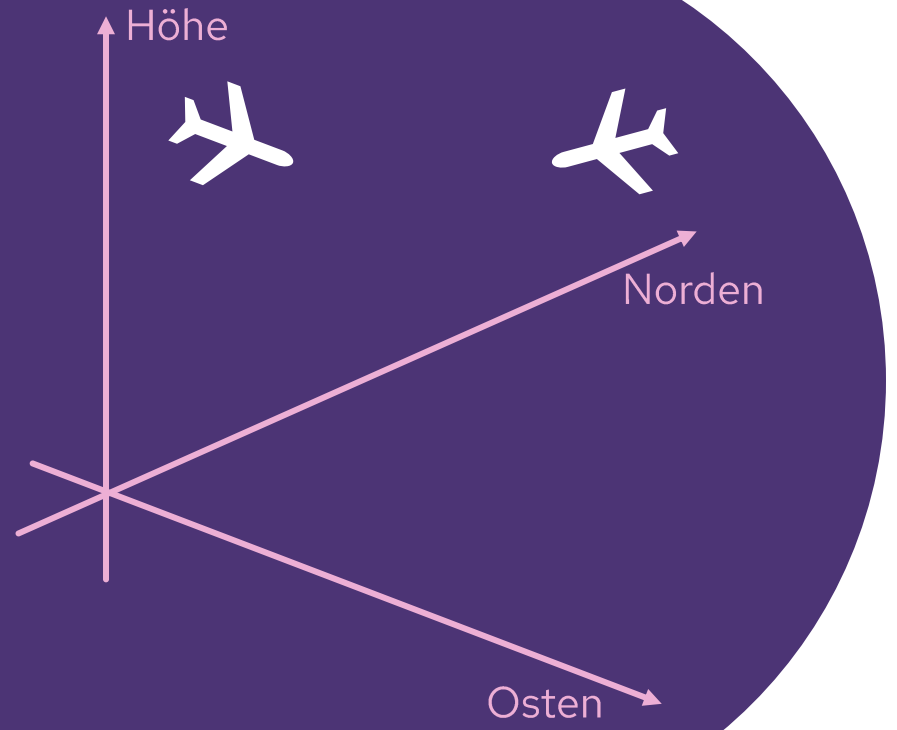
RPTU

Flugsicherung

Aufgabe 1 – Flugsicherung

„Glück gehabt?!“, denkt sich Herr Falk, der Fotograf dieser beiden Kondensstreifen. Gegen 11:00 Uhr morgens im Abstand von nur wenigen Sekunden, ziehen zwei Flugzeuge am Himmel vorbei. Die Bahnen der zwei Flugzeuge scheinen sich zu kreuzen und wäre die erste Maschine nur etwas später gekommen, dann wäre eine Kollision wohl nicht zu verhindern gewesen.

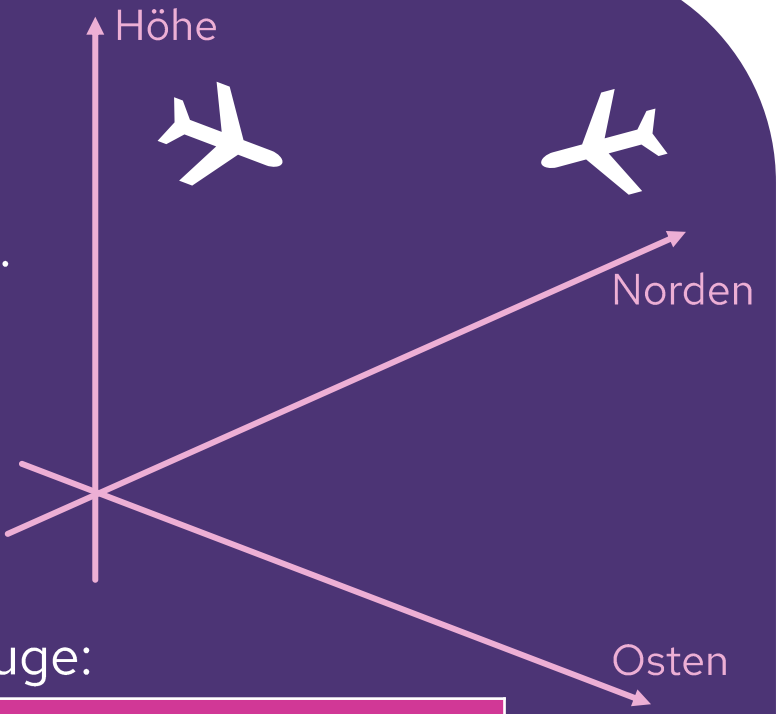




Hußmann, S. (2003). Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen, 122

Flugsicherung

Aufgabe 1 – Flugsicherung: Neben den Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Flugs über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeugs zur Antenne, die Höhe des Flugzeugs und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten – Norden, Osten, Höhe – (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.



Auf Nachfrage erhält Herr Falk jeweils drei Orte für die beiden Flugzeuge:

Flugzeug \ Zeit	11 : 10 : 10	11 : 10 : 15	11 : 10 : 20
Boing 767-299	(80, 112, 10380)	(1102, 978, 10366)	(2132, 1843, 10370)
Douglas DC 10-30F	(-78, 2302, 10045)	(988, 1103, 10062)	(2054, -96, 10079)

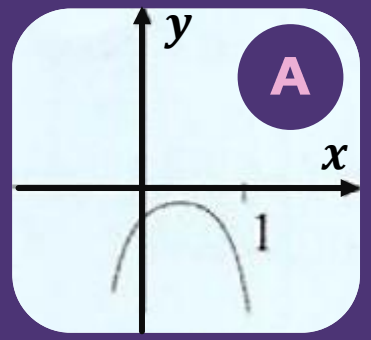
Hußmann, S. (2003). Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen, 122

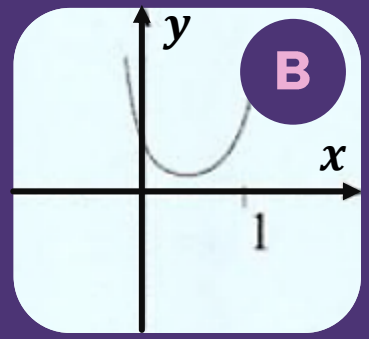
Graphen analysieren

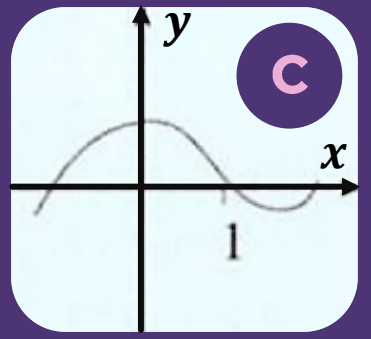
Aufgabe 2 – Graphen analysieren

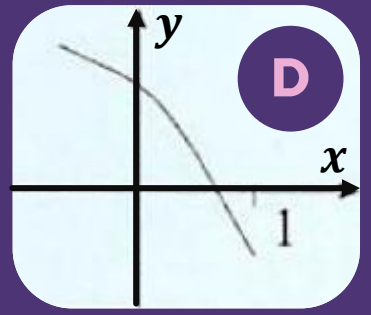
Lernende sollten einen Funktionsgraph skizzieren, der alle folgenden Eigenschaften erfüllt:

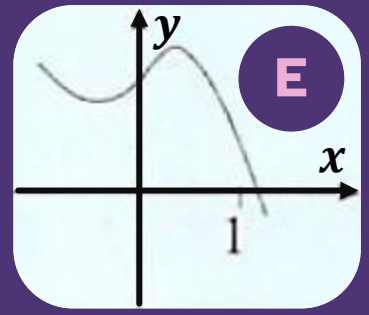
- $f'(0) < 0$,
- $f'(1) < 0$ und
- $f''(x)$ ist immer negativ











Analysieren Sie die nebenstehenden fünf von Lernenden skizzierten Funktionsgraphen **A**, **B**, **C**, **D** und **E.** Geben Sie an, welche(r) der Graphen die geforderten Eigenschaften aufweist und begründen Sie Ihre Antwort.

Gefäße füllen

Aufgabe 3 – Gefäße füllen

Verschiedene Gefäße mit den Nummern **1** bis **6** werden gleichmäßig (mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit) mit Wasser gefüllt.

Die Funktionsgraphen **A** bis **F** stellen jeweils den funktionalen Zusammenhang zwischen der Füllhöhe h eines Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

Ordnen Sie den Gefäßen jeweils einen passenden Funktionsgraph zu und begründen Sie Ihre Auswahl.



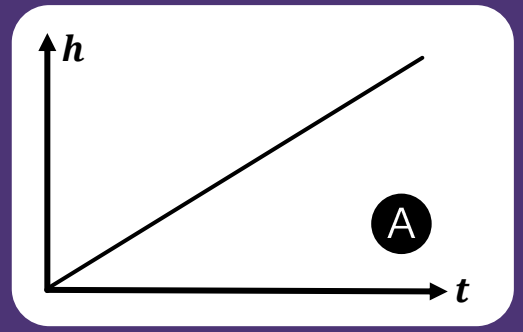


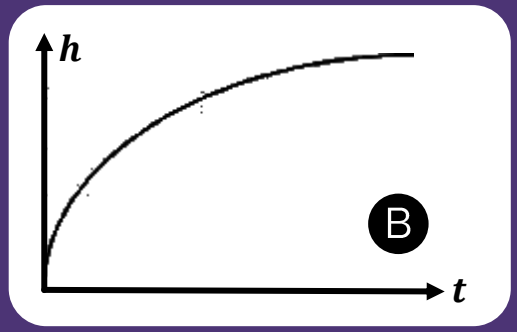


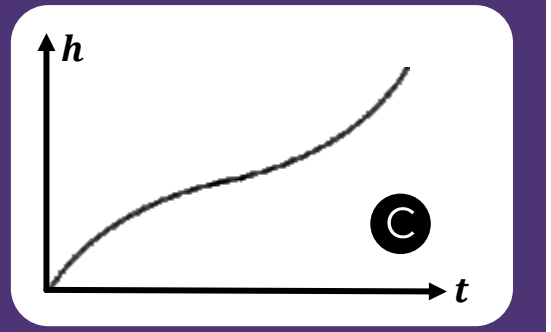


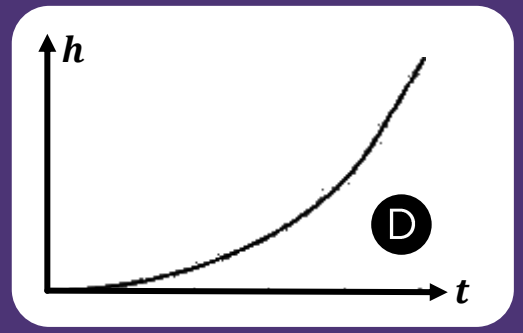


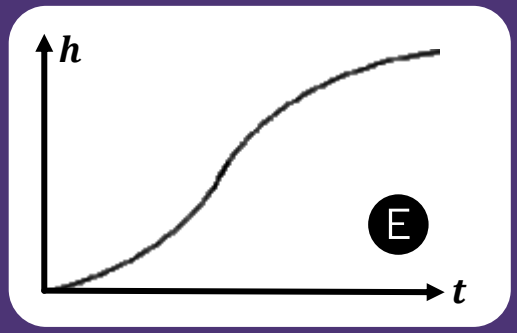


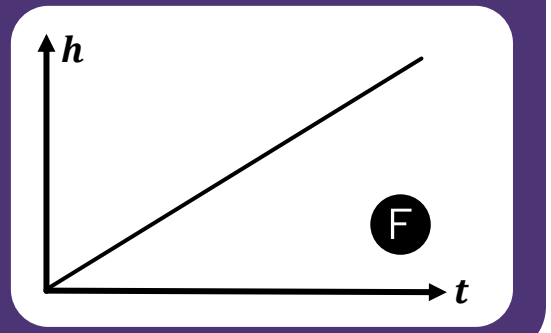












Tauchvorgang

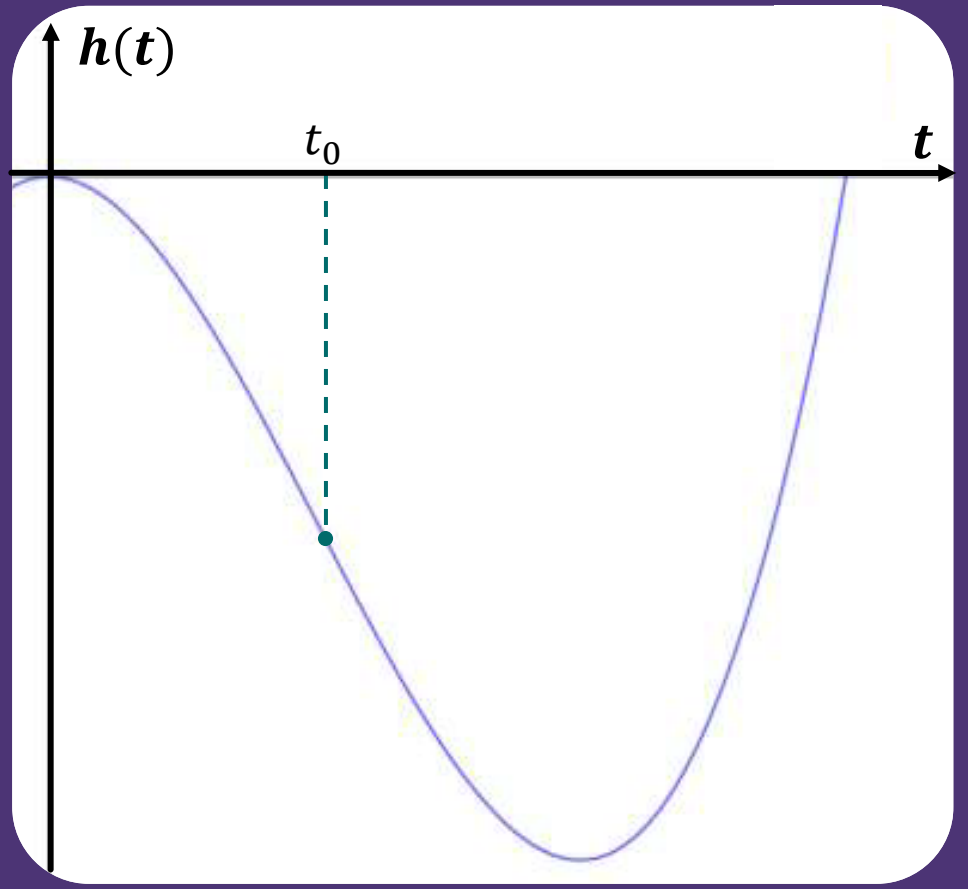
Aufgabe 4.1 – Tauchvorgang

Der Tauchvorgang eines U-Bootes wird durch eine Funktion $h(t)$ beschrieben, deren Graph rechts dargestellt ist. Dabei gibt $h(t)$ die Tauchtiefe unter der Oberfläche in Meter an, t ist die Zeit in Stunden.

a) Beschreiben Sie die Situation zum eingezeichneten Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.

b) Erklären Sie mathematisch mithilfe des Graphen, dass das U-Boot zum eingezeichneten Zeitpunkt t am schnellsten sinkt.

→ Finden Sie aus Sicht jeder der vier Grundvorstellungen eine Erklärung!

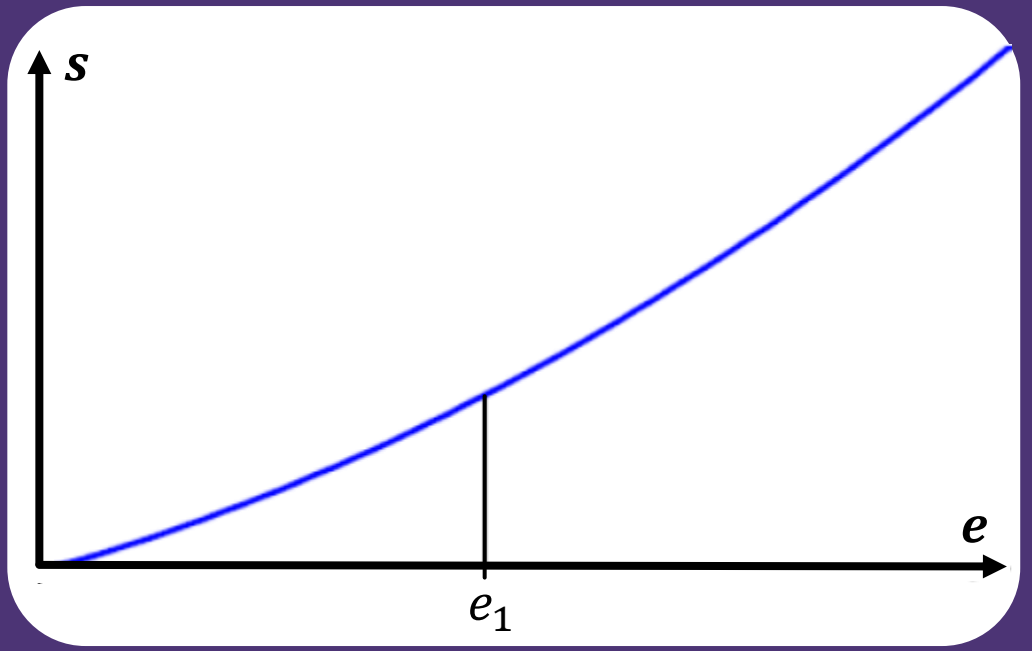


Kurs Herbst 2021, Tschepke-Fröhlich, Gymnasium St. Katharinen, bearbeitet

Einkommenssteuer

Aufgabe 4.2 – Einkommenssteuer

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet. e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).



a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $\frac{s(e_1)}{e_1}$.

b) $s'(e_1)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff.

c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro. Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h}$.

d) Interpretieren Sie die Ungleichung $\frac{s(e_1+h)-s(e_1)}{h} \geq \frac{s(e_1)}{e_1}$.

e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.

Dangl, M. et al. (2009). Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Klagenfurt: Universität Klagenfurt, 36

Hugmann, S. & Pfeiffer, B. (2009). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *PM 52(31)*, 35-38

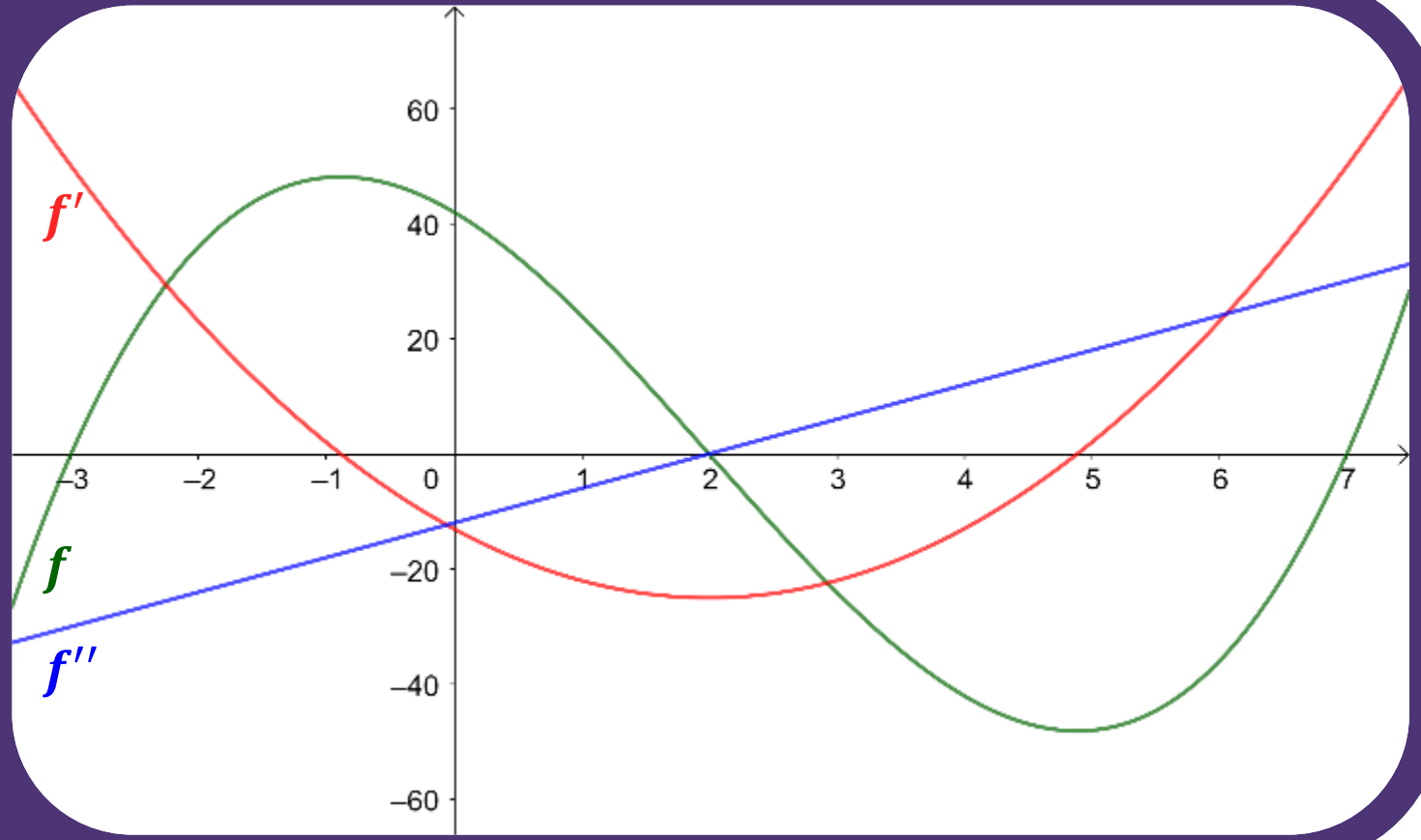
Rechenverfahren erklären

Aufgabe 5
Rechenverfahren erklären
Um eine Maximalstelle zu bestimmen, sind zwei Schritte notwendig:

(1) Man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und

(2) überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.

Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten **(1)** und **(2)** eine Maximalstelle erhält.



Grippewelle

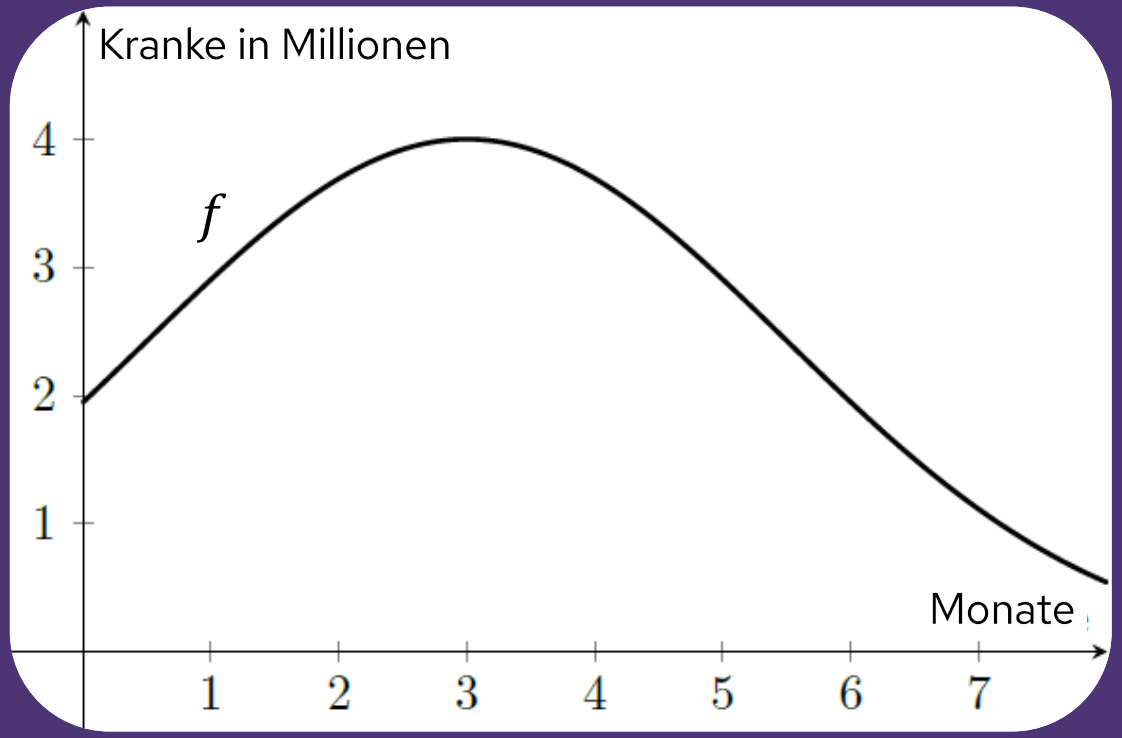
Aufgabe 6 – Grippewelle

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

b) Erläutern Sie die Bedeutung der Funktion $f'(t)$ im Sachzusammenhang.

c) Erklären Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 im Sachzusammenhang.



IPN (2022). Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium. Aufgabenkatalog – Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein. https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschungsprojekte/mathemint/2022-12-07_aufgabenkatalog_mathemint-implementation